



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

Teorias Conformes e Evolução de Schramm-Loewner Estocástica

Dissertação apresentada ao Instituto de
Física da Universidade Federal Fluminense
para obtenção do título de Mestre em Física.

Rodrigo Miranda Pereira

Orientador: Prof. Dr. Marco Moriconi

Niterói, RJ - Brasil

2008

The whole problem with the world is that
fools and fanatics are always so certain
of themselves, but wiser people so full
of doubts.

Bertrand Russell

Agradecimentos

Agradeço acima de tudo aos meus pais, uma espécie de co-autores dessa dissertação muito embora sejam jornalistas que na certa nunca ouviram falar em simetria conforme. Quaisquer palavras aqui para expressar o quanto sou grato seriam poucas e portanto injustas. Limito-me a um muito obrigado pelo apoio e por tudo mais, sendo “tudo mais” um conjunto infinito, de cardinalidade \aleph_1 provavelmente...

Agradeço também:

- ao Prof. Marco Moriconi não apenas o apoio acadêmico mas também psicológico, e isso foi muito importante. A quantidade de física que aprendi com você não caberia em um livro (muito menos em uma dissertação) até porque não se fazem livros sobre como se pensar um problema ou como buscar soluções simples e elegantes. Orgulho-me de ter sido seu primeiro aluno de pós-graduação;
- a Bruna Brito todo o apoio e companherismo. Sem você eu já teria surtado e essa dissertação estaria perdida em um computador, ainda na página 2 ou 3;
- à minha família o apoio irrestrito, 24h por dia, 7 dias por semana. Incentivo já é bom, mas com carinho e consideração não tem preço;
- a J.O. Frigério, P. Viana, P.R. Bertussi, G.M. Penello e F. Mondaini. Físicos brilhantes, amigos incríveis;
- a F.L. Hingel e aos companheiros da ‘Confraria Dirac’ os grandes momentos vividos do outro lado da ponte. Agradeço em especial ao confrade Prof. A.T. Costa a grande ajuda na complicada missão de imprimir tudo;
- ao irmão Gustavo Guerreiro a sobrevivência dos neurônios que habitam o lado direito do meu cérebro.

Por fim agradeço à CAPES e à FAPERJ o apoio financeiro.

Resumo

A natureza de uma transição de fase depende de forma crucial da dimensionalidade e das simetrias do sistema. Em particular, as transições de fase contínuas em sistemas bidimensionais possuem um grupo de simetrias de dimensão infinita chamado grupo conforme. O uso da simetria conforme nos permite calcular quantidades importantes do ponto de vista físico, como expoentes críticos e funções de correlação. Recentemente, foi proposta uma nova descrição das propriedades geométricas de sistemas bidimensionais durante uma transição de fase contínua que não requer o uso de uma descrição na rede, a chamada Evolução de Schramm-Loewner Estocástica (SLE). Esta nova formulação tem atraído muito a atenção de físicos e matemáticos, tendo sido contemplada com uma das medalhas Fields em 2006, para W. Werner. O propósito dessa dissertação é apresentar os fundamentos da teoria de campos conforme do ponto de vista algébrico, mais tradicional, assim como do ponto de vista da evolução estocástica. Aplicações dos métodos discutidos serão ilustradas no mais simples e importante modelo da física estatística: o modelo de Ising.

Abstract

The nature of a phase transition depends dramatically on the system's dimensionality and symmetries. In particular, the continuum phase transitions in two-dimensional systems possess an infinite dimensional symmetry group called the conformal group. Important quantities from the physical point of view, such as critical exponents and correlation functions, may be calculated using conformal symmetry. Recently, a new description of the geometrical properties of two-dimensional critical systems has been proposed without an underlying lattice realization, the so-called *Stochastic Schramm-Loewner Evolution* (SLE). This new formulation has attracted the attention of many physicists and mathematicians and has been awarded a Fields medal in 2006, given to W. Werner. The purpose of this dissertation is to present the fundamentals of conformal field theory from the algebraic point of view as well as from the SLE one. We illustrate these methods through their application in the most important model in statistical physics: the Ising model.

Sumário

1	Introdução	2
1.1	Panorama Histórico	2
1.2	Fenômenos Críticos	4
1.2.1	Transições de Fase	5
1.2.2	O Modelo de Ising	6
1.2.3	Expoentes Críticos	8
1.2.4	Leis de Escala	9
1.3	Correspondência TQC-Mecânica Estatística	12
2	Invariância Conforme	14
2.1	Transformações Conformes	14
2.2	Transformações Conformes em Duas Dimensões	16
2.3	Invariância Conforme	18
2.4	Funções de Correlação	20
2.5	Tensor Energia-Momento	23
2.6	Carga Central	26
2.7	Álgebra de Virasoro	29
2.8	Espaço de Hilbert	33
3	O Modelo de Ising	37
3.1	Argumento de Peierls	37
3.2	Teoria Fermiônica	38
3.3	Férmion Livre	40

3.4	Modelos Mínimos	43
3.5	Solução	45
4	Evolução de Schramm-Loewner Estocástica	51
4.1	Curvas Aleatórias e Modelos Estatísticos	51
4.2	Evolução de Loewner	53
4.3	Evolução de Schramm-Loewner Estocástica	57
4.4	Fases da SLE	58
4.5	Dimensão Fractal	60
4.6	SLE e Teorias Conformes	61
4.7	Comentários Finais	66
	Referências Bibliográficas	69

Introdução

1.1 Panorama Histórico

Pode-se dizer que o sucesso obtido pela teoria quântica de campos (TQC) na descrição da conexão entre spin e estatística [1], elucidando o princípio da exclusão de Pauli, marcou o início de sua forte relação com a física estatística. Anos mais tarde, a introdução do formalismo funcional estabeleceu uma sólida analogia entre as áreas. Não bastasse os teóricos de campos admirarem a beleza da mecânica estatística, tornava-se agora possível usar ferramentas que já conheciam para explorar novos aspectos das teorias ou ainda atacar problemas sobre os quais não costumavam pensar. Essa analogia formou a base para o desenvolvimento do grupo de renormalização na década de 70, que levou ao ápice a relação (alguns o consideram a unificação entre as áreas) e sacramentou de vez a TQC como uma ferramenta para a solução de problemas típicos da mecânica estatística, dentre os quais podemos citar o cálculo de expoentes críticos associados a uma transição de fase contínua (também chamada de segunda ordem).

A principal idéia por trás da aplicação de métodos de TQC no estudo de transições de fase é o fato de que, na proximidade de um ponto crítico, o comprimento de correlação entre os componentes do sistema é muito maior que o comprimento típico do sistema (o parâmetro de rede por exemplo), e por isso detalhes microscópicos tais como a geometria da rede não influenciam o comportamento das grandezas físicas. Podemos assim esperar que, tomando o limite contínuo para transformar a rede em um campo, devemos ser capazes de obter o comportamento das grandezas relevantes na proximidade de um ponto crítico. Essa é a idéia de universalidade, que embora já conhecida há mais tempo, foi popularizada na década de 70 por Leo Kadanoff, um dos primeiros a usar o grupo de renormalização em problemas de transições de fase. Um conceito importante que surge nesse

contexto é a invariância por transformações de escala: com a divergência do comprimento de correlação no ponto crítico não há mais uma escala típica, de modo que as grandezas devem permanecer invariantes se submetermos a rede a uma transformação global de escala (o que equivale a multiplicar as distâncias por uma constante, e portanto pela idéia de universalidade não deve alterar a física do sistema). Isso tudo levou a um grande desenvolvimento da interface TQC-física estatística, e também a um enorme avanço na teoria das transições de fase contínuas, incluindo um prêmio Nobel dado a Kenneth Wilson em 1982.

Uma nova hipótese introduzida pelo russo Alexander Polyakov [2], e posteriormente aplicada por ele em colaboração com os também russos A. Belavin e A. Zamolodchikov em um artigo de 1984 [3] que se tornou clássico, produziu resultados de forma surpreendentemente simples para teorias em duas dimensões, dando origem a um método extremamente poderoso: a invariância conforme. Se um sistema apresenta invariância por transformações de escala globais na proximidade de um ponto crítico, e se as interações são de curto alcance, então é razoável supor que apresente a simetria ainda maior de transformações de escala locais, *i.e.*, mudanças na escala de comprimento que dependem continuamente da posição na rede. Essas são as chamadas transformações conformes que, como veremos, são especialmente importantes em duas dimensões pois nesse caso formam um grupo de dimensão infinita. Com a hipótese de simetria conforme é possível calcular quantidades úteis tais como as funções de correlação de dois e três pontos sem grande esforço e ainda obter uma teoria elegante que relaciona de maneira clara a TQC com os diversos modelos de mecânica estatística identificando propriedades universais.

A partir do ano 2000, avanços no campo da matemática conhecido como geometria estocástica acabaram por sugerir uma nova formulação das teorias conformes. Reciclando idéias discutidas pelo matemático Charles Loewner na década de 20, Oded Schramm definiu uma família de curvas a um parâmetro κ em duas dimensões a qual denominou Evolução de Loewner Estocástica¹ (SLE) [4]. A partir daí foi capaz de provar que se um passeio aleatório com laços apagados² possui limite contínuo, e nesse limite é invariante conforme, então deve ser descrito por uma SLE com $\kappa = 2$, ou SLE_2 . Ele pôde ainda fazer conjecturas semelhantes relacionando percolação crítica a SLE_6 e varredura uniforme

¹*Stochastic Loewner Evolution.*

²*Loop-erased random walks.*

de árvores³ a SLE_8 , conjecturas essas provadas mais tarde usando técnicas de SLE. Os matemáticos acreditam que muitos outros modelos estatísticos tais como q-Potts e $O(n)$ possuem limite contínuo invariante conforme descrito por SLE_κ para algum κ . Algumas dessas relações já foram provadas e, de acordo com uma série de palestras ocorridas durante o ano de 2006 no Kavli Institute for Theoretical Physics [5], muitos avanços têm surgido na busca de provas para as demais. Após o amplo reconhecimento do valor da contribuição de Schramm, alguns passaram a se referir à sigla SLE como sendo “*Schramm-Loewner Evolution*” aproveitando a coincidência das iniciais, ou mesmo “*Stochastic Schramm-Loewner Evolution*”.

A conexão com a Teoria Conforme está no fato de que as curvas descritas por uma SLE são as paredes de domínios dos diversos modelos estatísticos no limite contínuo, esses descritos por uma teoria de campos conforme. E a vantagem não é apenas a criação de uma nova formulação: além de conter informações que a formulação padrão não contém (especialmente aspectos geométricos), os métodos de SLE possuem um rigor matemático mais profundo que os argumentos usuais de teoria conforme. Para os físicos teóricos, um grande resultado da SLE é o entendimento rigoroso do limite contínuo dos modelos de física estatística, *i.e.*, quando esse limite existe, o que ele significa e se é de fato invariante conforme.

Nessa dissertação faremos uma introdução à teoria de campos conforme em duas dimensões, discutindo aspectos teóricos relevantes e sua relação com a física estatística. Introduziremos então a SLE, mostrando como podemos obter novas informações e como relacioná-la com as teorias conformes. Na tentativa de explicitar o funcionamento das idéias expostas, procuraremos fazer sempre que possível aplicações no mais básico e ao mesmo tempo mais importante modelo da física estatística: o Modelo de Ising.

1.2 Fênômenos Críticos

Faremos uma breve introdução à física dos fenômenos críticos que será útil, seguindo essencialmente [6, 7, 8]. Um tratamento mais completo pode ser encontrado em [9].

³*Uniform spanning trees.*

1.2.1 Transições de Fase

Uma transição de fase se caracteriza por uma mudança nas características macroscópicas de um sistema estatístico quando algum parâmetro é variado. O exemplo mais cotidiano é a transição entre os estados líquido, sólido e gasoso da água, que ocorre ao variarmos a temperatura ou a pressão. Nesse caso observamos uma mudança na densidade do sistema, pois o gelo é mais denso que a água que por sua vez é mais densa que o vapor d'água. Ocorre que nem todas as transições são estruturalmente semelhantes. O exemplo gelo-água está entre as chamadas transições de fase de primeira ordem. Nessa classe de fenômenos o sistema precisa absorver (ou liberar) calor para poder trocar de fase, e portanto a energia interna sofre um salto na temperatura crítica de transição. A diferença de energia interna do sistema exatamente antes e exatamente depois da transição é o chamado calor latente, sendo portanto o calor que precisamos dar (ou que o sistema precisa liberar) para a mudança de fase acontecer.

Por outro lado, as chamadas transições de fase contínuas não envolvem calor latente e nem mudanças abruptas em quantidades microscópicas, porém apresentam descontinuidades ou mesmo divergências nas derivadas dessas quantidades. Um exemplo é a transição ferromagnética em materiais como o ferro. Conforme a temperatura diminui, a magnetização aumenta continuamente, porém a susceptibilidade magnética (que é a derivada da magnetização com relação a um campo magnético externo aplicado) sofre uma descontinuidade em uma dada temperatura crítica⁴.

No primeiro sistema de classificação sugerido por Paul Ehrenfest, uma transição de ordem N apresenta descontinuidade na derivada de ordem N da energia livre com relação a uma variável termodinâmica. As transições sólido/líquido/gás são de primeira ordem pois apresentam descontinuidades na densidade, a primeira derivada da energia livre com relação ao potencial químico. Na transição ferromagnética a descontinuidade está na susceptibilidade magnética, a segunda derivada da energia livre com relação ao campo aplicado, e por isso tratava-se de uma transição de segunda ordem. O problema dessa classificação é que ela não leva em conta a divergência de derivadas da energia livre, o que pode ocorrer no limite termodinâmico. Na transição ferromagnética por exemplo, a capacidade calorífica diverge na temperatura crítica. Por essa razão, a nomenclatura

⁴Conhecida como temperatura de Curie.

moderna considera apenas dois tipos de transição: a de primeira ordem, que envolve calor latente, e a contínua (às vezes chamada de segunda ordem) que não envolve. Nossa atenção estará voltada para as transições contínuas, pois elas é que se relacionam à invariância conforme.

1.2.2 O Modelo de Ising

O caso clássico de transição contínua (e historicamente o primeiro descrito) é o modelo de Ising em duas dimensões. Trata-se de uma rede de N spins, que podem ter valores $\sigma = \pm 1$, descrita pelo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i, \quad (1.1)$$

no qual os índices rotulam os sítios da rede e a notação $\langle ij \rangle$ indica que a soma é feita somente nos primeiros vizinhos de cada sítio. O primeiro termo representa o acoplamento entre spins vizinhos (consideraremos o caso ferromagnético, *i.e.*, $J > 0$) e o segundo termo representa a interação de cada spin com um campo magnético externo h . Se $h = 0$ o estado fundamental corresponde ao alinhamento entre todos os spins, e portanto é duplamente degenerado (todos iguais a 1 ou -1). Mas na presença de campo a energia é mínima quando todos os spins “se alinham” a ele (têm o mesmo sinal que h). Portanto em temperatura zero já podemos detectar uma transição de primeira ordem: variando o campo de $-\epsilon$ a $+\epsilon$ ocorre uma mudança abrupta no ordenamento dos spins. O aumento da temperatura insere desordem no sistema, de modo que em uma dada temperatura crítica T_c os spins estão tão desordenados que a mudança de sinal do campo pouco altera o comportamento médio. Esse é o ponto crítico, a partir do qual a transição de fase é contínua, ou seja a magnetização por sítio (o valor médio de um spin) varia continuamente quando h passa de um valor negativo para um positivo. Isso está ilustrado nos gráficos da figura 1.1, de [6].

Acima da temperatura crítica os spins exibem um comportamento predominantemente aleatório. Como o acoplamento é somente com o vizinho mais próximo, quanto mais distante um spin está do outro menor é a probabilidade de terem o mesmo valor, *i.e.*, menor é a correlação entre eles. Entretanto, conforme a temperatura tende a T_c essa correlação vai aumentando significativamente, já que a interação entre sítios vizinhos começa a ficar mais relevante. Isso favorece o surgimento de grandes conjuntos (*clusters*) de spins com

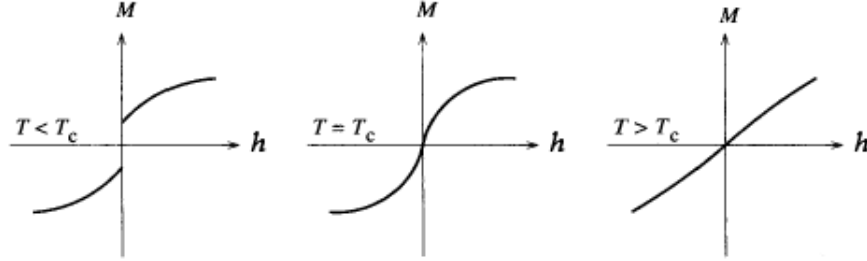


Figura 1.1: Magnetização como função do campo externo

mesmo valor. Para medir a correlação entre spins definimos a função de correlação entre pares:

$$\Gamma(r_i - r_j) = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle, \quad (1.2)$$

que só depende da distância entre os sítios em decorrência da invariância por translações. E dado que para longas distâncias os detalhes geométricos da rede perdem importância, invariância rotacional é recuperada e $\Gamma(r_i - r_j) = \Gamma(|r_i - r_j|)$. Uma medida da dependência estatística entre spins é dada pela função de correlação conexa,

$$\Gamma_c(r_i - r_j) = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle, \quad (1.3)$$

e é fácil verificar, usando o peso de Boltzmann para o cálculo de $\langle \sigma \rangle$ e então derivando com relação a h , que a susceptibilidade magnética no limite termodinâmico pode ser escrita como (teorema de flutuação-dissipação)

$$\chi = \beta \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma_c(d_i), \quad (1.4)$$

onde d_i é a distância do sítio i a um sítio marcado como 0 (pode ser qualquer um, por simetria de translação). Longe da temperatura crítica, Γ_c cai exponencialmente para grandes distâncias em uma escala característica dependente da temperatura $\xi(T)$, denominada comprimento de correlação:

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c \sim \exp -\frac{|r_i - r_j|}{\xi(T)}, \quad |r_i - r_j| \gg 1. \quad (1.5)$$

Mas vimos que quando $T \rightarrow T_c^+$ as correlações aumentam, e ocorre que em $T = T_c$ e $h = 0$ o comprimento de correlação diverge, definindo um ponto crítico. Em princípio esperaríamos que o tamanho típico dos *clusters* fosse da ordem de ξ , mas na verdade todos

os tamanhos até ξ estão presentes, caso contrário $\Gamma_c(d)$ teria um pico em $d \sim \xi$ e seria pequeno para distâncias menores, o que não acontece pois a susceptibilidade magnética diverge no ponto crítico (cf. equação 1.4). *Concluimos assim que o sistema flutua em todas as escalas e são formados clusters de todos os tamanhos.* A consequência é que o comportamento dos observáveis passa a ser independente de detalhes microscópicos do sistema tais como a geometria específica da rede ou a forma exata do acoplamento, ou em outras palavras, nasce a idéia de universalidade discutida na seção anterior. E já que as flutuações ocorrem em todas as escalas, podemos esperar também uma auto-similaridade, *i.e.*, invariância por transformações de escala.

1.2.3 Expoentes Críticos

Experimentalmente verifica-se que suficientemente próximo ao ponto crítico a dependência dos observáveis com os parâmetros variáveis é uma lei de potência, o que define os chamados expoentes críticos. Isso ocorre até mesmo com a função de correlação entre pares, pois o comprimento de correlação excede as dimensões do sistema físico não havendo espaço para um decaimento exponencial.

Em 1944 o norueguês Lars Onsager obteve uma celebrada solução exata do modelo de Ising em duas dimensões [10], calculando exatamente os expoentes do que se tornou o primeiro modelo estatístico resolvido. A tabela 1.1 contém os expoentes críticos mais comumente estudados, com as nomenclaturas historicamente consagradas, as definições, e os valores exatos no modelo de Ising 2D. Nela, d representa a dimensão espacial. É importante notar que o expoente β é definido apenas para temperaturas abaixo de T_c , uma

Expoente	Definição	Ising 2D
α	$C \sim (T - T_c)^{-\alpha}$	0
β	$M \sim (T_c - T)^\beta$	1/8
γ	$\chi \sim (T - T_c)^{-\gamma}$	7/4
δ	$M \sim h^{1/\delta}$	15
ν	$\xi \sim (T - T_c)^{-\nu}$	1
η	$\Gamma(x) \sim x ^{2-d-\eta}$	1/4

Tabela 1.1: Expoentes críticos e os valores para Ising 2D

vez que a magnetização é zero para $T > T_c$. O expoente δ por sua vez é definido em $T = T_c$. Já para o calor específico, para a susceptibilidade magnética e para o comprimento de correlação, em princípio poderíamos ter expoentes diferentes nos casos $T \rightarrow T_c^+$ e $T \rightarrow T_c^-$, mas é um resultado do grupo de renormalização (comprovado experimentalmente) que essa diferença não existe⁵. Além disso, quantidades divergentes podem apresentar termos finitos que no entanto perdem importância na transição.

1.2.4 Leis de Escala

Seguindo o procedimento de transformações de blocos de spin sugerido por Leo Kadanoff [11] (na forma apresentada na referência [7]), vamos deduzir relações entre os expoentes e motivar a hipótese básica por trás da física dos fenômenos críticos, a hipótese de escala, segundo a qual a densidade de energia livre f perto da transição obedece a

$$f(\lambda^a t, \lambda^b h) = \lambda f(t, h) \quad (1.6)$$

para algum par de expoentes a e b , onde $t = T/T_c - 1$ é a temperatura reduzida e h o campo externo.

A idéia é, partindo do modelo de Ising (1.1), agrupar spins em blocos de lado r (em unidades de parâmetro de rede dos spins originais) criando assim uma nova variável

$$\Sigma_I = \frac{1}{R} \sum_{i \in I} \sigma_i, \quad (1.7)$$

onde a soma é feita nos r^d sítios do interior de um bloco I , e R é um fator de normalização que garante $\Sigma_I = \pm 1$. A hipótese crucial do procedimento é a de que as interações entre as novas variáveis de blocos são semelhantes às dos spins originais, o que é razoável pois perto do ponto crítico o comprimento de correlação é muito maior que r . Dessa maneira, a nova rede pode ser descrita por um hamiltoniano de mesma forma mas com parâmetros diferentes:

$$\mathcal{H}' = -J' \sum_{\langle IJ \rangle} \Sigma_I \Sigma_J - h' \sum_I \Sigma_I. \quad (1.8)$$

O comprimento de correlação entre os blocos fica reescalado para ξ/r , assim, de acordo com a definição do expoente ν , a nova temperatura reduzida após a transformação é

$$t' = r^{1/\nu} t. \quad (1.9)$$

⁵Ela existe para os coeficientes de proporcionalidade, mas não entraremos nessa questão.

A energia de interação total com o campo externo não pode ser alterada pelo simples agrupamento de spins, portanto devemos ter

$$h \sum_i \sigma_i = h' \sum_I \Sigma_I = \frac{h'}{R} \sum_i \sigma_i, \quad (1.10)$$

o que nos dá $h' = Rh$. Pela mesma razão a energia livre total também é igual, logo a energia livre por bloco é r^d vezes a por sítio da rede original, além de terem a mesma forma funcional uma vez que os hamiltonianos têm a mesma forma. Ou seja,

$$f(t', h') = r^d f(t, h) \quad \Rightarrow \quad f(t, h) = r^{-d} f(r^{1/\nu} t, Rh). \quad (1.11)$$

Para obter (1.6) precisamos de R como função de r , o que é feito analisando-se a função de correlação entre blocos:

$$\begin{aligned} \Gamma'(x) &= \langle \Sigma_I \Sigma_J \rangle - \langle \Sigma_I \rangle \langle \Sigma_J \rangle \\ &= R^{-2} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \{ \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle \} \\ &= R^{-2} (r^d)^2 \Gamma(rx), \end{aligned}$$

e usando Γ dado na tabela 1.1 temos

$$\begin{aligned} \Gamma'(x) &= \frac{R^{-2} r^{2d}}{|rx|^{d-2+\eta}} \\ &= \frac{R^{-2} r^{d+2-\eta}}{|x|^{d-2+\eta}}. \end{aligned}$$

No entanto $\Gamma'(x)$ também deve obedecer à tabela 1.1, isso fixa $R = r^{(d+2-\eta)/2}$ de modo que $h' = r^{(d+2-\eta)/2} h$. Fazendo-se então $r = \lambda^{1/d}$, (1.11) se transforma na hipótese de escala (1.6) e podemos associar

$$a = 1/(\nu d) \quad \text{e} \quad b = (d + 2 - \eta)/(2d). \quad (1.12)$$

Podemos agora associar a e b aos demais expoentes críticos. A hipótese (1.6) implica que a função $t^{-1/a} f(t, h)$ é invariante sob as transformações $t \rightarrow \lambda^a t$ e $h \rightarrow \lambda^b h$ e, portanto, só pode depender do invariante $y \equiv h/t^{b/a}$, *i.e.*,

$$g(y) = t^{-1/a} f(t, h) \quad \Rightarrow \quad f(t, h) = t^{1/a} g(y). \quad (1.13)$$

A magnetização espontânea é

$$M = -\left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{h=0} = t^{(1-b)/a} g'(0), \quad (1.14)$$

mostrando a relação

$$\beta = (1 - b)/a. \quad (1.15)$$

Além disso, sabemos que para $t \rightarrow 0$ a magnetização vai como $M \sim h^{1/\delta}$, ou seja, nesse limite $g'(y) \rightarrow y^{1/\delta}$. Substituindo em (1.14) obtemos uma expressão que depende de $t^{(1-b-b/\delta)/a}$, e que portanto só é finita e não nula para $t = 0$ se

$$1 - b - b/\delta = 0. \quad (1.16)$$

Derivando f novamente chegamos na susceptibilidade magnética:

$$\chi = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}\right|_{h=0} = t^{(1-2b)/a} g''(0), \quad (1.17)$$

mostrando que

$$\gamma = -(1 - 2b)/a. \quad (1.18)$$

A segunda derivada com relação à temperatura nos dá o calor específico (capacidade calorífica por unidade de volume):

$$c = -T \left.\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}\right|_{h=0} = -\frac{1}{T_c} t^{1/a-2} g''(0), \quad (1.19)$$

mostrando a última relação

$$\alpha = 2 - 1/a. \quad (1.20)$$

Finalmente, usando (1.12) escrevemos a e b em função de ν e η , para então substituir em (1.15), (1.16), (1.18) e (1.20) e eliminar quatro dos seis expoentes:

$$\alpha = 2 - \nu d \quad (1.21)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \nu (d - 2 + \eta) \quad (1.22)$$

$$\gamma = \nu (2 - \eta) \quad (1.23)$$

$$\delta = (d + 2 - \eta) / (d - 2 + \eta). \quad (1.24)$$

Além da óbvia vantagem de reduzir o trabalho, essas equações nos dão todos os expoentes em função de dois diretamente ligados às funções de correlação - exatamente os objetos que gostamos de tratar na TQC.

1.3 Correspondência TQC-Mecânica Estatística

Na seção anterior vimos que a divergência do comprimento de correlação em uma transição de fase conduz à noção de universalidade de um sistema estatístico, *i.e.*, as grandezas físicas ficam independentes de detalhes microscópicos tais como a geometria específica da rede. Sistemas com comportamentos críticos semelhantes são ditos de uma mesma classe de universalidade. Embora detalhes microscópicos não alterem o comportamento crítico, diferenças mais profundas como a dimensionalidade ou o tipo de simetria do acoplamento entre as variáveis dão origem a outras classes, que podem possuir por exemplo expoentes críticos diferentes.

A idéia de classe de universalidade indica que o comportamento crítico deve permanecer inalterado quando tomamos o limite do parâmetro de rede indo a zero, formando um contínuo, o que justifica uma abordagem de teoria de campos. Isso é reforçado ainda pelo importante papel desempenhado pelas flutuações no ponto crítico, sugerindo a utilização de técnicas de uma teoria com flutuações quânticas. A conhecida analogia entre TQC e mecânica estatística clássica é a ferramenta que buscamos para tratar os fenômenos críticos usando métodos e nomenclaturas usuais de TQC.

Seja um sistema estatístico, como o modelo de Ising, definido em uma rede hipercúbica de dimensão d . Rotularemos uma das d direções como o “tempo” τ , e as demais serão as direções espaciais \mathbf{r} . Podemos descrever o sistema dando as configurações de todos os spins em cada tempo, *i.e.*, para cada hiperplano $\tau = \text{constante}$. As configurações de um dado tempo $\tau = \tau_1$ serão representadas por $\{\sigma\}(\tau_1)$. A matriz de transferência \mathcal{T} relaciona as configurações em dois tempos diferentes, e tem elementos

$$\langle \{\sigma\}(\tau_1) | \mathcal{T} | \{\sigma\}(\tau_2) \rangle = \exp \left(-\beta \tilde{\mathcal{H}}(\tau_1, \tau_2) \right), \quad (1.25)$$

onde $\tilde{\mathcal{H}}$ contém todas interações nas direções espaciais de cada tempo e as interações entre os pares dos dois tempos distintos, e portanto decompõe o Hamiltoniano total em $\mathcal{H} = \sum_{\tau} \tilde{\mathcal{H}}(\tau, \tau + 1)$. A função de partição é

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum_{\{\sigma\}} \exp -\beta \mathcal{H} = \sum \langle \sigma(\tau_1) | \mathcal{T} | \sigma(\tau_2) \rangle \cdots \langle \sigma(\tau_M) | \mathcal{T} | \sigma(\tau_1) \rangle \\ &= \text{tr } \mathcal{T}^M, \end{aligned} \quad (1.26)$$

considerando condições de contorno periódicas e sendo M o número de sítios na direção temporal.

A analogia fica clara ao olharmos para o operador quântico de evolução temporal $U(t', t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}(t'-t)}$, seus elementos

$$U_{t_{i+1}, t_i} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\phi]\right) \quad (1.27)$$

e a amplitude de transição entre estados, dada pela formulação de integrais de caminho:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\phi]\right). \quad (1.28)$$

Comparando as expressões notamos as semelhanças formais resumidas na tabela (1.2).

Teoria Quântica	Mecânica Estatística
tempo t	“tempo” $\tau = it$
constante de planck $1/\hbar$	temperatura $\beta = 1/k_b T$
amplitude de transição \mathcal{Z}	função de partição \mathcal{Z}
operador de evolução temporal U	matriz de transferência \mathcal{T}
ação euclideana S	hamiltoniano clássico \mathcal{H}

Tabela 1.2: Analogia entre teoria quântica e mecânica estatística

É interessante destacar a relação entre temperatura e constante de Planck, já que normalmente vemos a temperatura como uma medida das flutuações em um sistema de mecânica estatística, enquanto a constante de Planck representa as flutuações em uma teoria quântica (pelo princípio da incerteza). No limite $\hbar \rightarrow 0$ a trajetória clássica é a única a contribuir para a integral de Feynman, suprimindo as flutuações, o que equivale ao limite $T \rightarrow 0$ em que o sistema está congelado, sem flutuar. Com base na correspondência, podemos interpretar a matriz de transferência como o operador de evolução temporal de uma teoria euclideana

$$\mathcal{T} = e^{-\tau H}, \quad (1.29)$$

definindo um H análogo ao hamiltoniano da teoria quântica, que por isso é chamado de *Hamiltoniano Quântico*. Completamos assim o mapeamento de um sistema estatístico clássico com d dimensões espaciais em um sistema quântico com $(d - 1)$.

Invariância Conforme

Até agora apresentamos razões para estabelecer que sistemas críticos apresentam invariância sob o grupo de transformações contendo translações, rotações e transformações globais de escala (*i.e.*, transformações do tipo $\mathbf{x} \rightarrow b\mathbf{x}$)¹. A idéia seminal de Belavin, Polyakov e Zamolodchikov (BPZ) [3] foi supor que sistemas com interações de curto alcance deveriam apresentar simetria sob o grupo maior de transformações conformes, que contém o anterior como subgrupo mas inclui ainda transformações locais de escala, ou seja, transformações do tipo $\mathbf{x} \rightarrow b(\mathbf{x})\mathbf{x}$. Uma vez que as interações são de curto alcance, parece razoável supor que o sistema não deva se comportar de maneira muito diferente quando submetido a transformações de escala que variam suavemente ponto a ponto, especialmente no limite contínuo. A idéia mostrou-se extremamente poderosa dando origem à teoria de campos conforme. Nesse capítulo estudaremos propriedades das transformações conformes e veremos como a hipótese de simetria conforme pode simplificar cálculos na teoria de fenômenos críticos. As referências básicas são [3, 7, 8, 12, 13, 14].

2.1 Transformações Conformes

Em um espaço-tempo com métrica $g_{\mu\nu}$, uma transformação conforme de coordenadas é definida como um mapeamento invertível $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ que multiplica o tensor métrico por um fator local de escala:

$$g'_{\mu\nu}(\mathbf{x}') = \Lambda(\mathbf{x})g_{\mu\nu}(\mathbf{x}). \quad (2.1)$$

¹Como estaremos interessados em espaços euclidianos o uso de negrito identificará vetores, e não somente a parte espacial de um vetor no espaço de Minkowski

Geometricamente são transformações que preservam ângulos entre curvas, já que

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{(\mathbf{r}^2 \mathbf{r}'^2)^{1/2}} \quad (2.2)$$

permanece invariante.

Em uma transformação infinitesimal

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(\mathbf{x}), \quad (2.3)$$

o tensor $g_{\mu\nu}$ se transforma covariantemente

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} - (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu), \quad (2.4)$$

de modo que (2.1) implica

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = f(\mathbf{x}) g_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{x}) = \frac{2}{d} \partial_\mu \epsilon^\mu(\mathbf{x}), \quad (2.5)$$

onde tiramos o traço no último passo e $d = \text{Tr}(g_{\mu\nu})$ é a dimensão. Temos portanto a restrição

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} (\partial \cdot \epsilon) g_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

que é a equação a ser resolvida para encontrarmos a forma das transformações conformes. É simples ver que translações, rotações e dilatações são soluções, sendo as translações de ordem zero e as demais de ordem um. É possível ainda encontrar soluções de ordem dois,

$$\epsilon^\mu(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{b})x^\mu - b^\mu \mathbf{x}^2, \quad (2.7)$$

onde \mathbf{b} é um vetor constante. As transformações finitas originadas por (2.7) são chamadas transformações conformes especiais:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu - b^\mu \mathbf{x}^2}{1 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}^2 \mathbf{x}^2}. \quad (2.8)$$

O significado geométrico fica mais claro quando expressas na forma

$$\frac{x'^\mu}{\mathbf{x}'^2} = \frac{x^\mu}{\mathbf{x}^2} - b^\mu, \quad (2.9)$$

ou seja, tratam-se de uma translação por um vetor \mathbf{b} , precedida e seguida de inversões $x^\mu \rightarrow x^\mu / \mathbf{x}^2$.

Queremos agora saber se essas são todas as soluções possíveis. Partindo de (2.5) podemos mostrar que [7]:

$$(2 - d)\partial_\mu\partial_\nu f = g_{\mu\nu}\partial^2 f, \quad (2.10)$$

e contraindo com $g^{\mu\nu}$

$$(d - 1)\partial^2 f = 0. \quad (2.11)$$

Vemos em (2.11) que em uma dimensão não há restrições sobre f , de modo que toda transformação suave é conforme. Para $d > 2$, (2.10) e (2.11) nos dão $\partial_\mu\partial_\nu f = 0$ e portanto (de 2.5) $\partial_\mu\partial_\nu\partial^\rho\epsilon_\rho = 0$, em outras palavras, ϵ^μ é no máximo quadrático em x^μ . Concluimos assim que para $d > 2$ os casos citados esgotam as soluções de (2.6), *i.e.*, translações, rotações, dilatações e transformações conformes especiais formam o grupo das transformações conformes em dimensões maiores que dois.

2.2 Transformações Conformes em Duas Dimensões

Para $d = 2$ a equação (2.10) não se aplica e, por isso, voltaremos a (2.6). Num espaço euclidiano ($g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$) de duas dimensões, ela nos dá as equações de Cauchy-Riemann

$$\partial_1\epsilon_1 = \partial_2\epsilon_2 \quad \partial_1\epsilon_2 = -\partial_2\epsilon_1, \quad (2.12)$$

sugerindo que passemos ao uso de variáveis complexas na descrição do sistema:

$$z = x^0 + ix^1 \quad \bar{z} = x^0 - ix^1. \quad (2.13)$$

Sendo assim, o grupo de transformações conformes em duas dimensões é isomórfico ao grupo de transformações analíticas de coordenadas, cuja dimensionalidade é infinita (precisamos de infinitos parâmetros - os coeficientes das séries de Laurent - para definí-lo em uma região). Translações e dilatações continuam com a mesma forma, uma rotação por um ângulo α passa a ser escrita como $z \rightarrow z' = e^{i\alpha}z$, enquanto uma transformação conforme especial fica

$$z' = \frac{z}{1 + az}, \quad (2.14)$$

para $a = a_1 + ia_2$, sendo a_1 e a_2 os dois parâmetros da transformação.

O efeito de (2.3) em um campo sem dimensão e sem spin $\phi(z, \bar{z})$ no plano é

$$\begin{aligned} \phi'(z', \bar{z}') &= \phi(z, \bar{z}) \\ &= \phi(z', \bar{z}') - \epsilon(z')\partial_{z'}\phi(z', \bar{z}') - \bar{\epsilon}(z')\partial_{\bar{z}'}\phi(z', \bar{z}'), \end{aligned} \quad (2.15)$$

e se $\epsilon(z)$ é analítica podemos expandir $\epsilon(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^{n+1}$ dando uma variação funcional

$$\begin{aligned} \delta\phi &= -\epsilon(z)\partial_z\phi(z, \bar{z}) - \bar{\epsilon}(z)\partial_{\bar{z}}\phi(z, \bar{z}) \\ &= \sum_n [c_n \ell_n \phi(z, \bar{z}) + \bar{c}_n \bar{\ell}_n \phi(z, \bar{z})], \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde introduzimos os geradores da álgebra de Lie

$$\ell_n = -z^{n+1}\partial_z \quad \text{e} \quad \bar{\ell}_n = -\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}}, \quad (2.17)$$

cujas relações de comutação são

$$\begin{aligned} [\ell_n, \ell_m] &= (n-m)\ell_{n+m} \\ [\bar{\ell}_n, \bar{\ell}_m] &= (n-m)\bar{\ell}_{n+m} \\ [\ell_n, \bar{\ell}_m] &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Como ℓ e $\bar{\ell}$ comutam, a álgebra é decomposta na soma direta de duas álgebras isomórficas geradas por $\{\ell\}$ e $\{\bar{\ell}\}$. Isso ajuda a esclarecer um questão freqüentemente confusa: como devemos tratar as variáveis z e \bar{z} ? O mais apropriado é tratá-las como independentes, o que equivale a estender x^0 e x^1 de (2.13) ao plano complexo. Nesse caso (2.13) passa a ser uma mera mudança de variáveis e \bar{z} não é o complexo conjugado de z , mas uma variável complexa independente. Contudo, devemos ter em mente que o espaço físico é a subvariedade definida por $z^* = \bar{z}$, chamada superfície real, mas só levamos isso em consideração se precisarmos explicitamente de propriedades globais ou de analiticidade das funções de correlação.

O gerador ℓ_n é singular para $n > 1$ quando $z \rightarrow \infty$ e para $n < -1$ quando $z = 0$, conseqüentemente apenas o subconjunto $\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1$ é definido para qualquer z na esfera de Riemann ($\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) e induz transformações analíticas do plano complexo nele mesmo. Essa subálgebra está associada ao grupo conforme projetivo $SL(2, \mathbb{C})$ (ou global), gerando as transformações conformes projetivas², que podem ser escritas na forma

$$z \rightarrow w_p(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (2.19)$$

com a, b, c, d complexos e obedecendo a $ad - bc = 1$. Translações são geradas por ℓ_{-1} e $\bar{\ell}_{-1}$, dilatações pela combinação $\ell_0 + \bar{\ell}_0 = x^\mu \partial_\mu$, rotações por $i(\ell_0 - \bar{\ell}_0) = \epsilon^{\mu\nu} x_\mu \partial_\nu$, sendo $\epsilon^{\mu\nu}$ o

²Também chamadas de globais, pois são definidas para qualquer z na esfera de Riemann.

tensor totalmente anti-simétrico e, finalmente, ℓ_1 e $\bar{\ell}_1$ geram as transformações conformes especiais.

Os operadores físicos serão auto-estados da subálgebra de Cartan, gerada por $\{\ell_0, \bar{\ell}_0\}$, com autovalores $\{h, \bar{h}\}$ chamados dimensões (ou pesos) conformes holomórfica e anti-holomórfica respectivamente. Uma vez que $\ell_0 + \bar{\ell}_0$ gera as dilatações, a dimensão de escala do operador será dada por $\Delta = h + \bar{h}$, e como $i(\ell_0 - \bar{\ell}_0)$ é o operador de rotação, seu autovalor, o spin, será $s = h - \bar{h}$.

2.3 Invariância Conforme

Em um modelo estatístico definimos os chamados operadores de escala, que são os observáveis caracterizados pela covariância de todas suas funções de correlação de n pontos sob uma transformação de escala. No modelo de Ising são eles o operador de spin (ou densidade de parâmetro de ordem) $\sigma(\mathbf{r})$ e a densidade de energia $\varepsilon(\mathbf{r})$. Por covariância sob transformações de escala queremos dizer que o comportamento deve ser semelhante ao da energia livre, descrito em (1.6). Seja por exemplo a função de dois pontos conexa associada ao observável $\sigma(\mathbf{r})$

$$G_\sigma(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle \sigma(\mathbf{r}_1)\sigma(\mathbf{r}_2) \rangle - \langle \sigma(\mathbf{r}_1) \rangle \langle \sigma(\mathbf{r}_2) \rangle, \quad (2.20)$$

ela deve então, em termos das variáveis t e h já definidas, se transformar como

$$G_\sigma(\mathbf{r}; t, h) = \lambda^{-2\Delta_\sigma} G_\sigma(\mathbf{r}/\lambda; \lambda^a t, \lambda^b h), \quad (2.21)$$

onde Δ_σ é chamado de dimensão de escala de σ (definimos um Δ_ε analogamente para ε).

Com base nisso, descreveremos uma teoria conforme pelas transformações de seus campos (operadores de escala), mas como nem todos se transformam da mesma maneira, classificá-los-emos segundo o tipo de transformação.

Um campo sem spin $\phi(\mathbf{x})$ sob transformações conformes projetivas (2.19) transforma-se como³

$$\phi(\mathbf{x}) \rightarrow \phi'(\mathbf{x}') = \left| \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right|^{-\Delta/d} \phi(\mathbf{x}), \quad (2.22)$$

³Em princípio é possível obter isso a partir das representações da álgebra conforme, sendo porém mais simples postulá-lo com base no comportamento de operadores de escala. Veja seção 4.2 em [7].

onde Δ é a dimensão de escala e $|\partial\mathbf{x}'/\partial\mathbf{x}|$ é o determinante jacobiano da transformação, relacionado ao fator de escala de (2.1) por

$$\left| \frac{\partial\mathbf{x}'}{\partial\mathbf{x}} \right| = \Lambda(\mathbf{x})^{-d/2}. \quad (2.23)$$

Um campo que se transforma dessa maneira é denominado *quasi-primário*. Em duas dimensões a definição se estende a campos com spin. Definindo as dimensões conformes citadas na seção anterior

$$h = \frac{1}{2}(\Delta + s) \quad \bar{h} = \frac{1}{2}(\Delta - s), \quad (2.24)$$

temos sob transformações conformes projetivas:

$$\phi'(w_p(z), \bar{w}_p(\bar{z})) = \left(\frac{dw_p}{dz} \right)^{-h} \left(\frac{d\bar{w}_p}{d\bar{z}} \right)^{-\bar{h}} \phi(z, \bar{z}). \quad (2.25)$$

Campos *quasi-primários* são os mais fundamentais da teoria, no entanto formam um conjunto infinito. Em duas dimensões podemos tirar vantagem das propriedades especiais da álgebra conforme e impor a condição mais restritiva de covariância sobre transformações conformes arbitrárias (e não somente projetivas), criando o subconjunto dos chamados *campos primários*:

$$\phi'(w(z), \bar{w}(\bar{z})) = \left(\frac{dw}{dz} \right)^{-h} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \right)^{-\bar{h}} \phi(z, \bar{z}). \quad (2.26)$$

Todo campo primário é *quasi-primário*, mas a recíproca não é verdadeira. Campos que não são primários são ditos *secundários*. O mais importante dessa distinção é que as propriedades dos campos secundários podem ser deduzidas a partir das dos primários, os quais podem existir em número finito dependendo do sistema. No modelo de Ising contínuo por exemplo temos apenas dois campos primários, os já citados operadores de escala densidade de parâmetro de ordem e densidade de energia.

Vale notar que transformações de operadores de escala são procedimentos formais que só têm sentido no âmbito de funções de correlação. As funções de correlação de operadores (*quasi-*)primários é que se transformam covariantemente sob transformações conformes (projetivas):

$$\langle \phi_1(w_1, \bar{w}_1) \cdots \phi_n(w_n, \bar{w}_n) \rangle = \prod_{i=1}^n \left(\frac{dw}{dz_i} \right)_{w=w_i}^{-h_i} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}_i} \right)_{\bar{w}=\bar{w}_i}^{-\bar{h}_i} \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle. \quad (2.27)$$

2.4 Funções de Correlação

Definidas as transformações dos campos, o poder da invariância conforme começa a aparecer. Com o que temos até então já é possível fixar a forma das funções de correlação de dois e três pontos para teorias com dimensão arbitrária d . Primeiro vamos analisar transformações de funções de dois pontos de campos *quasi*-primários sem spin, aplicando (2.22). Para transformações de escala $\mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x}$ o jacobiano é simplesmente λ^d de modo que

$$\langle \phi_1(\mathbf{x}_1) \phi_2(\mathbf{x}_2) \rangle = \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} \langle \phi_1(\lambda \mathbf{x}_1) \phi_2(\lambda \mathbf{x}_2) \rangle. \quad (2.28)$$

Invariância por rotações e translações colocam a restrição

$$\langle \phi_1(\mathbf{x}_1) \phi_2(\mathbf{x}_2) \rangle = f(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \quad (2.29)$$

que combinada com (2.28) nos dá $f(\lambda \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})/\lambda^{\Delta_1 + \Delta_2}$. Portanto devemos ter

$$\langle \phi_1(\mathbf{x}_1) \phi_2(\mathbf{x}_2) \rangle = \frac{C_{12}}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}, \quad (2.30)$$

onde C_{12} é um coeficiente constante ligado à normalização dos campos. Para impor covariância por transformações conformes especiais precisaremos de dois resultados: o jacobiano da transformação

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right| = \frac{1}{(1 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + b^2 \mathbf{x}^2)^d}, \quad (2.31)$$

e a transformação da distância entre pontos

$$|\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j| = \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{(1 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_i + b^2 \mathbf{x}_i^2)^{1/2} (1 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_j + b^2 \mathbf{x}_j^2)^{1/2}}, \quad (2.32)$$

ambos facilmente calculáveis a partir de (2.8). A covariância de (2.30) sob transformações conformes especiais implica então

$$\frac{C_{12}}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} = \frac{C_{12} (\gamma_1 \gamma_2)^{(\Delta_1 + \Delta_2)/2}}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2} |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}, \quad (2.33)$$

com $\gamma_i = 1 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_i + b^2 \mathbf{x}_i^2$. Para que isso seja satisfeito devemos ter $(\gamma_1 \gamma_2)^{(\Delta_1 + \Delta_2)/2} = \gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2} \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, ou seja, $\Delta_1 = \Delta_2$. Por conseguinte, se as dimensões de escala de dois campos forem diferentes, eles não estarão correlacionados. Ficamos com

$$\langle \phi_1(\mathbf{x}_1) \phi_2(\mathbf{x}_2) \rangle = \begin{cases} \frac{C_{12}}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^{2\Delta}} & \text{se } \Delta_1 = \Delta_2 \equiv \Delta \\ 0 & \text{se } \Delta_1 \neq \Delta_2 \end{cases} \quad (2.34)$$

e comparando com a tabela 1.1 extraímos o expoente crítico η em função da dimensão de escala:

$$\eta = 2\Delta + 2 - d. \quad (2.35)$$

Apenas com argumentos de simetria conforme fomos capazes de mostrar que a função de correlação tem o comportamento crítico esperado de lei de potência e ainda relacionamos o expoente crítico com a dimensão de escala, propriedade característica dos campos *quasi*-primários.

Em duas dimensões essas idéias podem ainda ser estendidas a campos com spin. Nesse caso, usando variáveis complexas, a distância $|x_i - x_j|$ é dada por $[(z_i - z_j)(\bar{z}_i - \bar{z}_j)]^{1/2}$ e (2.34) se transforma em

$$\langle \phi_1(\mathbf{x}_1)\phi_2(\mathbf{x}_2) \rangle = \frac{C_{12}}{(z_1 - z_2)^{2h}(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2\bar{h}}}, \quad (2.36)$$

com a restrição adicional de que a soma dos spins de um correlator deve ser zero, preservando assim a invariância por rotações.

Uma análise similar pode ser feita em funções de três pontos e, novamente, a covariância conforme projetiva é capaz de fixar o tipo de dependência. Covariância por translações, rotações e dilatações fornece

$$\langle \phi_1(\mathbf{x}_1)\phi_2(\mathbf{x}_2)\phi_3(\mathbf{x}_3) \rangle = \sum_{abc} \frac{C_{123}^{(abc)}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{13}^c} \quad (2.37)$$

onde $x_{ij} \equiv |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ e a soma em a, b, c é sujeita à condição $a + b + c = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$. Impondo covariância por transformações conformes especiais temos

$$\frac{C_{123}^{(abc)}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{13}^c} = \frac{C_{123}^{(abc)}}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2} \gamma_3^{\Delta_3}} \frac{(\gamma_1 \gamma_2)^{a/2} (\gamma_2 \gamma_3)^{b/2} (\gamma_1 \gamma_3)^{c/2}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{13}^c}, \quad (2.38)$$

que restringe

$$a + c = 2\Delta_1 \quad a + b = 2\Delta_2 \quad b + c = 2\Delta_3. \quad (2.39)$$

Três equações para três incógnitas cujas soluções são:

$$\begin{aligned} a &= \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 \\ b &= \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1 \\ c &= \Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

A função de três pontos é dada portanto por apenas um termo da soma de (2.37):

$$\langle \phi_1(\mathbf{x}_1)\phi_2(\mathbf{x}_2)\phi_3(\mathbf{x}_3) \rangle = \frac{C_{123}}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} x_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1} x_{13}^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}}. \quad (2.41)$$

Em duas dimensões também podemos fazer uma extensão para campos com spin análoga a (2.36) trocando Δ por h , x_{ij} por z_{ij} e adicionando uma parte anti-holomórfica.

O próximo passo natural é tentar a mesma coisa para funções de quatro pontos, entretanto o mesmo sucesso não pode ser obtido por causa da existência de invariantes na teoria conhecidos como razões anarmônicas. Invariância por rotações e translações nos dá a distância entre dois pontos como possível candidato a invariante da teoria. Invariância por transformações de escala restringe ainda mais os invariantes a razões entre distâncias. Vimos na equação (2.32) como a distância entre pontos se transforma sob transformações conformes especiais e a partir dela percebemos que só é possível construir invariantes com, no mínimo, quatro pontos, as razões anarmônicas:

$$\frac{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4|}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3| |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4|} \quad \text{ou} \quad \frac{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4|}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3| |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4|}. \quad (2.42)$$

As funções de quatro pontos podem conter funções arbitrárias dessas razões pois elas não estragam a covariância conforme projetiva. O máximo que podemos dizer é

$$\langle \phi_1(\mathbf{x}_1) \dots \phi_4(\mathbf{x}_4) \rangle = f \left(\frac{x_{12}x_{34}}{x_{13}x_{24}}, \frac{x_{12}x_{34}}{x_{23}x_{14}} \right) \prod_{i < j}^4 x_{ij}^{\Delta/3 - \Delta_i - \Delta_j}, \quad (2.43)$$

sendo $\Delta = \sum_{i=1}^4 \Delta_i$. Em duas dimensões há uma particularidade pois os quatro pontos devem estar sempre no mesmo plano, e isso gera uma relação adicional que reduz o número de razões anarmônicas:

$$\eta \equiv \frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\eta}{1-\eta} = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{14}z_{23}}, \quad (2.44)$$

e uma expressão equivalente para um $\bar{\eta}$ envolvendo \bar{z} . Ainda assim a função de quatro pontos pode conter uma função arbitrária $f(\eta, \bar{\eta})$, desde que tenha resultado real. Para campos primários, a invariância sob transformações conformes arbitrárias em duas dimensões é uma condição forte o suficiente para fixar as demais funções de correlação, sendo esse um dos grandes resultados do artigo BPZ [3].

2.5 Tensor Energia-Momento

Realizando uma transformação de variáveis arbitrária $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu(\mathbf{x})$ em uma teoria com ação $S = \int d^d x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$, induzimos uma variação $\delta S \equiv S' - S$ em primeira ordem de

$$\delta S = - \int d^d x j^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu, \quad (2.45)$$

onde $j^{\mu\nu}$ é a corrente canônica de Noether que depende explicitamente da forma da transformação⁴. A corrente associada a translações espaciais é o chamado *tensor energia-momento* $T^{\mu\nu}$. Uma transformação infinitesimal pode ser localmente considerada uma translação, e assim

$$\delta S = - \frac{1}{S_d} \int d^d x T^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu, \quad (2.46)$$

onde inserimos S_d , a área de uma hipersfera unitária, por conveniência. Se a teoria é invariante de Lorentz, então $T^{\mu\nu}$ pode ser feito simétrico, de modo que

$$\delta S = - \frac{1}{2S_d} \int d^d x T^{\mu\nu} (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu), \quad (2.47)$$

e para transformações conformes podemos usar (2.6) obtendo

$$\delta S = - \frac{1}{dS_d} \int d^d x T^\mu_\mu \partial_\rho \epsilon^\rho. \quad (2.48)$$

Se o traço de $T^{\mu\nu}$ for zero então $\delta S = 0$ e a teoria é invariante sob transformações conformes, mas a recíproca não é verdadeira já que $\partial_\rho \epsilon^\rho$ não é uma função arbitrária. Sob condições bastante gerais o tensor energia-momento de uma teoria invariante de escala pode ser construído com traço zero, e se isso for possível, então a invariância conforme é uma consequência das invariâncias de Poincaré e de escala. Embora não haja uma prova geral de que $T^{\mu\nu}$ tenha traço nulo em uma teoria invariante de escala, consideraremos isso verdadeiro uma vez que contra-exemplos não são encontrados. Um argumento usual é a substituição $\epsilon^\mu(\mathbf{x}) = \epsilon x^\mu$ em (2.48) mostrando que a integral de T^μ_μ deve ser nula. É possível também mostrar que o valor esperado de $(T^\mu_\mu)^2$ é zero (seção 4.3.3 de [7]). Se por um lado a invariância por rotações (Lorentz) nos diz que o tensor energia-momento é simétrico e a invariância de escala impõe traço nulo, a invariância por transformações conformes especiais por sua vez não adiciona novas condições.

⁴Excluimos a possibilidade de existência de um termo do tipo $\int A^\mu \epsilon_\mu$ para manter a simetria de translação

Estamos interessados no caso 2d em que $\epsilon(\mathbf{x})$ é analítica. De acordo com o teorema de Liouville a função constante é a única função analítica limitada em todo o plano complexo, portanto funções não triviais têm alguma singularidade e ϵ não pode ser pequeno em todos os pontos. Para contornar isso, consideraremos $\epsilon(\mathbf{x})$ pequeno em todo espaço de modo que a transformação seja conforme somente no interior de uma região D_1 delimitada por uma curva C . Na região externa D_2 a transformação será diferenciável e decrescente. Vamos primeiramente analisar o que acontece com funções de correlação (calculadas em pontos no interior de D_1) sob transformações conformes infinitesimais como (2.3). A variação de um campo primário sob essa transformação obtida por (2.26) é

$$\delta\phi(z, \bar{z}) = ((h\partial_z\epsilon + \epsilon\partial_z) + (\bar{h}\partial_{\bar{z}}\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}\partial_{\bar{z}}))\phi(z, \bar{z}), \quad (2.49)$$

e, conseqüentemente, a função de n pontos tem variação

$$\delta\langle\phi_1 \cdots \phi_n\rangle = \sum_{i=1}^n [(h_i\partial_{z_i}\epsilon + \epsilon\partial_{z_i}) + (\bar{h}_i\partial_{\bar{z}_i}\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}\partial_{\bar{z}_i})] \langle\phi_1 \cdots \phi_n\rangle. \quad (2.50)$$

É também possível calcular essa variação a partir da integral funcional (consideramos uma teoria euclideana):

$$\begin{aligned} \delta\langle\phi_1 \cdots \phi_n\rangle &= \frac{1}{Z_0} \int \mathcal{D}\phi \phi_1 \cdots \phi_n (-\delta S) e^{-S[\phi]} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{D_2} d^2x \partial^\mu \epsilon^\nu(\mathbf{x}) \langle T_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \phi_1 \cdots \phi_n \rangle, \end{aligned} \quad (2.51)$$

onde usamos (2.46) e a integral é feita somente em D_2 pois em D_1 a transformação é conforme e a teoria é invariante, dando $\delta S = 0$. Igualando (2.50) e (2.51) temos a chamada identidade de Ward conforme:

$$\sum_{i=1}^n [h_i\partial_{z_i}\epsilon + \epsilon\partial_{z_i} + \bar{h}_i\partial_{\bar{z}_i}\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}\partial_{\bar{z}_i}] \langle\phi_1 \cdots \phi_n\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{D_2} d^2x \partial^\mu \epsilon^\nu(\mathbf{x}) \langle T_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \phi_1 \cdots \phi_n \rangle. \quad (2.52)$$

Integrando o lado direito por partes obtemos dois termos:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{D_2} d^2x \epsilon^\nu(\mathbf{x}) \langle \partial^\mu T_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \phi_1 \cdots \phi_n \rangle + \frac{1}{2\pi} \oint_C d\Sigma n^\mu \epsilon^\nu(\mathbf{x}) \langle T_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \phi_1 \cdots \phi_n \rangle, \quad (2.53)$$

sendo n^μ ortonormal à curva C e $d\Sigma$ um elemento de linha. O lado esquerdo de (2.52) não pode depender da forma da transformação em D_2 , que é arbitrária, e $\epsilon^\mu(\mathbf{x})$ arbitrário nessa região implica a lei de conservação

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (2.54)$$

para que o primeiro termo de (2.53) se anule.

Sendo simétrico e com traço nulo, o tensor energia-momento⁵ tem apenas duas componentes independentes as quais definiremos (0 e 1 referem-se às componentes de (2.13)):

$$T(z) \equiv T_{zz} = \frac{1}{4}(T_{00} - T_{11} - 2iT_{01}) \quad \text{e} \quad \bar{T}(\bar{z}) \equiv T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{4}(T_{00} - T_{11} + 2iT_{01}). \quad (2.55)$$

A equação (2.54) com a condição de traço nulo dá para essas componentes as equações de Cauchy-Riemann:

$$\partial_{\bar{z}}T(z) = \partial_z\bar{T}(\bar{z}) = 0, \quad (2.56)$$

mostrando que são funções respectivamente holomórfica e anti-holomórfica, o que justifica a separação da dependência em z e \bar{z} . Isso permitirá separar completamente a teoria em um parte holomórfica e outra anti-holomórfica. Com esse objetivo usaremos a fórmula de diferenciação de Cauchy

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C dz \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}, \quad (2.57)$$

para reescrever o lado esquerdo de (2.52):

$$h_i \partial_{z_i} \epsilon + \epsilon \partial_{z_i} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \epsilon(z) \left(\frac{h_i}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{z-z_i} \partial_{z_i} \right), \quad (2.58)$$

e uma expressão equivalente anti-holomórfica, porém com sinal trocado (teorema de Cauchy conjugado). Usando também (2.53), (2.52) fica

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^n \left[\oint_C dz \epsilon(z) \left(\frac{h_i}{(z-z_i)^2} + \frac{\partial_{z_i}}{z-z_i} \right) - \oint_C d\bar{z} \bar{\epsilon}(\bar{z}) \left(\frac{\bar{h}_i}{(\bar{z}-\bar{z}_i)^2} + \frac{\partial_{\bar{z}_i}}{\bar{z}-\bar{z}_i} \right) \right] \langle \phi_1 \cdots \phi_n \rangle \\ & = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \epsilon(z) \langle T(z) \phi_1 \cdots \phi_n \rangle - \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\bar{z} \bar{\epsilon}(\bar{z}) \langle \bar{T}(\bar{z}) \phi_1 \cdots \phi_n \rangle. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Se $\epsilon(z)$ representar uma transformação conforme projetiva, então ela é definida em todo plano (incluindo a região D_2) e o lado esquerdo de (2.52), e por extensão o de (2.59), são nulos, pois a teoria é invariante conforme. Vimos anteriormente que os elementos ℓ_{-1}, ℓ_0 e ℓ_1 da álgebra (2.18) definidos em (2.17) são os geradores das transformações conformes projetivas e, portanto, para essas transformações $\epsilon(z)$ pode comportar-se como $1, z$ ou z^2 . Para que nesse caso o lado direito de (2.59) também se anule, uma condição consistente é

⁵Em 2d $T^{\mu\nu}$ também é chamado de tensor de *stress*, em analogia à teoria da elasticidade.

que $T(z)$ comporte-se como z^{-4} para z grande, pois assim o integrando pode conter apenas z^{-4} , z^{-3} ou z^{-2} , dando sempre resíduo zero nas integrais.

Visto que ϵ é arbitrário, (2.59) pode ser escrita na forma conhecida como identidade de Ward conforme local:

$$\langle T(z)\phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \sum_i \left(\frac{h_i}{(z - z_i)^2} + \frac{1}{z - z_i} \partial_{z_i} \right) \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle, \quad (2.60)$$

mais uma expressão análoga para $\bar{T}(\bar{z})$. Vemos assim que inserir T (ou \bar{T}) na função de correlação de campos primários equivale a aplicar um operador diferencial de dimensão 2 à função de correlação sem T (ou \bar{T}), de onde conclui-se que as dimensões conformes (h, \bar{h}) de T e \bar{T} são respectivamente $(2, 0)$ e $(0, 2)$ e, portanto, que ambos têm dimensão de escala $\Delta = 2$, T tem spin $s = 2$ e \bar{T} tem spin $s = -2$.

Vale observar que (2.60) poderia conter termos regulares, pois quaisquer funções analíticas adicionadas ao integrando de (2.58) não alterariam o lado esquerdo, já que a integral de uma função analítica sobre uma curva fechada é nula. Expressões como (2.60) fora da função de correlação (embora só adquiram sentido no interior de uma) são chamadas expansões de produtos de operadores, mais conhecidas por OPE⁶:

$$T(z)\phi(w, \bar{w}) = \frac{h}{(z - w)^2} \phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z - w} \partial_w \phi(w, \bar{w}) + \text{termos regulares}, \quad (2.61)$$

$$\bar{T}(\bar{z})\phi(w, \bar{w}) = \frac{\bar{h}}{(\bar{z} - \bar{w})^2} \phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{\bar{z} - \bar{w}} \partial_{\bar{w}} \phi(w, \bar{w}) + \text{termos regulares}. \quad (2.62)$$

Por analiticidade das funções de correlação os termos regulares devem ser nulos. Isso ocorre porque qualquer termo proporcional a uma potência positiva de z não pode ser analítico no plano todo, pois diverge no infinito sem que haja uma razão física para isso (as funções de correlação divergem somente nos pólos, os pontos de inserção dos operadores de campo).

2.6 Carga Central

Uma OPE da forma (2.61) naturalmente só é válida para operadores primários, que se transformam como (2.26). Um exemplo de campo que não preenche esse requisito é o próprio tensor de *stress*. Por invariância de translação temos $\langle T(z) \rangle = \langle \bar{T}(\bar{z}) \rangle = 0$, por

⁶Operator product expansion.

isso se T obedecesse a (2.61) a função de dois pontos seria nula (ou regular), mas não há razão para isso ser verdade. Como T tem dimensão de escala 2, a covariância por transformações de escala $z \rightarrow \lambda z$ permite apenas a adição de um termo proporcional a $1/(z-w)^4$ na OPE, pois assim $\langle T(z)T(w) \rangle \rightarrow \lambda^{-4} \langle T(z)T(w) \rangle$ como esperaríamos. Dessa maneira, a OPE para o tensor de *stress* fica

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w}, \quad (2.63)$$

e a função de dois pontos

$$\langle T(z)T(w) \rangle = \frac{c/2}{(z-w)^4}, \quad (2.64)$$

com expressões análogas para a parte anti-holomórfica. A constante c é denominada carga central, e não pode ser calculada a partir de considerações de simetria. Seu valor é determinado pelo comportamento a curtas distâncias e portanto depende da teoria específica em questão, estando ligada à classe de universalidade do modelo. As partes holomórfica e anti-holomórfica não se acoplam e $\langle T\bar{T} \rangle = 0$.

Voltando à identidade de Ward conforme (2.52), lembrando que o lado esquerdo contém a variação dos campos e que o lado direito é igual ao segundo termo de (2.53), podemos escrever

$$\delta T(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \epsilon(z) T(z) T(w), \quad (2.65)$$

e substituindo (2.63) temos a variação de T

$$\begin{aligned} \delta T(w) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \epsilon(z) \left[\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} \right] \\ &= (2\partial_w \epsilon(w) + \epsilon(w)\partial_w) T(w) + \frac{c}{12} \partial_w^3 \epsilon(w), \end{aligned} \quad (2.66)$$

onde aplicamos a fórmula (2.57) de Cauchy novamente na solução da integral. Essa equação é semelhante à variação de um campo primário dada em (2.49) com dimensões conformes $(h, \bar{h}) = (2, 0)$ possuindo, no entanto, um termo anômalo contendo a carga central. É interessante notar que a variação do valor esperado do tensor de *stress*,

$$\delta \langle T \rangle = \langle \delta T \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' \epsilon(z') \langle T(z') T(z) \rangle = \frac{c}{12} \partial_z^3 \epsilon(z), \quad (2.67)$$

se anula somente quando ϵ é no máximo quadrático, ou seja, para transformações conformes projetivas. Isso acontece porque, como já discutimos, transformações conformes gerais modificam a geometria do plano. Por trás dessa idéia está uma interessante interpretação

para a carga central. Para entendê-la precisamos estender a lei de transformação de T dada em (2.66) para transformações conformes finitas, resultado expresso por

$$T(z) = \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 T'(w) + \frac{c}{12} \{w; z\}, \quad (2.68)$$

onde introduzimos a derivada Schwarziana:

$$\{w; z\} = \frac{\partial_z^3 w}{\partial_z w} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial_z^2 w}{\partial_z w} \right)^2. \quad (2.69)$$

A demonstração disso está longe de ser simples, mas podemos verificar que reobtemos (2.66) no limite infinitesimal, *i.e.*, quando $w(z) = z + \epsilon g(z)$. Nesse caso, mantendo primeira ordem em ϵ temos

$$\{w; z\} = \frac{\epsilon g'''(z)}{1 + \epsilon g'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\epsilon g''(z)}{1 + g'(z)} \right) \approx \epsilon g'''(z), \quad (2.70)$$

e podemos redefinir $\epsilon g(z) \equiv \epsilon(z)$. A transformação infinitesimal se caracteriza por

$$T'(z + \epsilon(z)) = T'(z) + \epsilon(z) \partial_z T'(z). \quad (2.71)$$

Podemos substituir $T'(z)$ usando (2.68) e (2.70), observando que em primeira ordem vale a aproximação $(\partial_z w)^{-2} \approx 1 - 2\partial_z \epsilon(z)$ e $\partial_z T'(z) = \partial_z T(z)$:

$$\begin{aligned} T'(z) + \epsilon(z) \partial_z T(z) &= (1 - 2\partial_z \epsilon) \left[T(z) - \frac{c}{12} \partial_z^3 \epsilon \right] \\ \Rightarrow \delta T &= (2\partial_z \epsilon + \epsilon(z) \partial_z) T(z) + \frac{c}{12} \partial_z^3 \epsilon(z), \end{aligned} \quad (2.72)$$

que é a (2.66). Vamos então calcular a variação do tensor de *stress* utilizando (2.68) para a transformação $w(z) = (L/2\pi) \ln z$, que mapeia o plano em uma faixa de largura L com condições de contorno periódicas (a mudança de geometria fica clara aqui):

$$T_{\text{faixa}}(w) = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \left(T_{\text{plano}}(z) z^2 - \frac{c}{24} \right). \quad (2.73)$$

Tomando $\langle T_{\text{plano}} \rangle = 0$, o valor esperado da variação de T_{faixa} é

$$\langle T_{\text{faixa}}(w) \rangle = -\frac{c}{24} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2. \quad (2.74)$$

Na analogia entre TCQ e mecânica estatística vimos que a ação euclideana equivale ao hamiltoniano do modelo estatístico. A variação da energia média é dada pela variação

do logaritmo da função de partição, $\delta \ln Z = \delta \langle \mathcal{H} \rangle$. Usando (2.46) e evocando a analogia temos

$$\delta \ln Z = -\frac{1}{2\pi} \int d^2x T^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu \quad (2.75)$$

Realizando uma dilatação horizontal na faixa, ou seja, uma transformação $(x^0, x^1) \rightarrow ((1 + \epsilon)x^0, x^1)$, podemos ver como a energia varia e calcular a energia livre por unidade de comprimento na faixa. Temos $\partial_\mu \epsilon_\nu = \epsilon \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0}$, e como $T^{00} = T + \bar{T}$, concluímos que temos uma diferença de energia média

$$\begin{aligned} \delta \ln Z &= -\frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^L dx^1 (\langle T_{\text{faixa}} \rangle + \langle \bar{T}_{\text{faixa}} \rangle) \\ &= -\frac{\epsilon L}{2\pi} \left[-\frac{c}{24} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 - \frac{c}{24} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\epsilon \pi c}{6L}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Essa diferença deve ser balanceada por uma mudança de sinal oposto na energia livre $-\delta \ln Z$. Dividindo pelo comprimento esticado ϵ temos a energia livre por unidade de comprimento da faixa:

$$f = -\frac{\pi c}{6L}. \quad (2.77)$$

É claro que essa expressão é relativa a energia livre do plano, que foi considerada zero ao tomarmos $\langle T_{\text{plano}} \rangle = 0$. Em outras palavras, saindo do plano para uma faixa de largura finita obtivemos uma variação de energia livre que depende de c . Aqui finalmente surge a interpretação que buscávamos: a situação é muito semelhante ao efeito Casimir da eletrodinâmica [15]. A carga central pode ser vista como proporcional a uma energia de Casimir no sentido de que mede a diferença de energia entre geometrias distintas.

Essa equação fornece também um método muito utilizado para se determinar computacionalmente a carga central de um modelo: simulações são realizadas em uma faixa e a energia livre é então calculada numericamente [16].

2.7 Álgebra de Virasoro

Conhecendo a regra de transformação de um operador podemos deduzir identidades de Ward para ele. A OPE nos diz que T ‘age’ em outros operadores por termos singulares da forma $1/(z - z_i)^k$ para algum k . Em operadores primários k é igual 2 ou, se a dimensão

conforme for nula, 1. No próprio T temos $k = 4$ e outros valores são possíveis. O operador secundário $\partial\phi$, com ϕ primário, tem $k = 3$ por exemplo. De fato, a derivada de ordem n de um operador primário dá origem a um pólo de ordem $k = n + 2$, o que é fácil de demonstrar usando-se o teorema de Cauchy na regra de transformação, semelhantemente ao que fizemos em (2.58). Isso sugere o cálculo dos coeficientes dessa expansão de Laurent, o que formalmente equivale a uma expansão de Laurent do tensor de *stress*. Uma vez que impusemos covariância conforme ao tensor de *stress*, sua expansão nos dará os geradores das transformações conformes. Com esse objetivo lançaremos mão de um formalismo conhecido por quantização radial.

Na seção 1.3 vimos que a definição da dimensão temporal em uma teoria euclideana é arbitrária. Em uma rede, simplesmente escolhemos uma das direções para chamar de “tempo” e definimos a matriz de transferência para ligar as configurações em tempos distintos. No limite contínuo a distância entre sítios vai a zero, o que nos dá liberdade para definir direções temporais e espaciais de maneiras diferentes. Em duas dimensões usaremos a quantização radial, definindo a dimensão temporal na direção radial e a dimensão espacial compactificada em círculos concêntricos. Do ponto de vista de um espaço de Minkowski, inicialmente definimos a teoria em um cilindro com o tempo indo de $-\infty$ a $+\infty$ ao longo do eixo e a coordenada x compactificada indo de 0 a L , com condições de contorno periódicas, *i.e.*, os pontos $(0, t)$ e (L, t) são idênticos. Realizando uma continuação para o espaço euclideano o cilindro é descrito por uma variável complexa $\xi = t + ix$, e então podemos transformá-lo em um plano pelo mapeamento

$$z = e^{2\pi\xi/L}, \quad (2.78)$$

que pode ser visualizado na figura 2.1, de [7].

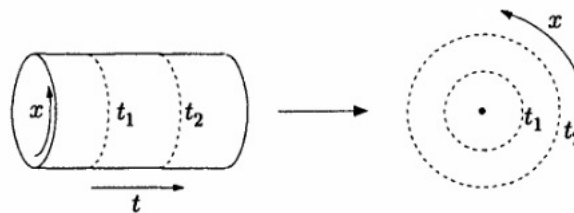


Figura 2.1: O mapeamento do cilindro no plano

Em TQC sempre calculamos funções de correlação do ordenamento temporal de opera-

dores, estando aqueles com maiores tempos à esquerda, pois elas são adequadas ao tratamento perturbativo. No âmbito da quantização radial o ordenamento temporal transforma-se em um ordenamento radial, podendo ser escrito como

$$T\{\phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\} = \begin{cases} \phi_1(z_1)\phi_2(z_2) & \text{se } |z_1| > |z_2| \\ \phi_2(z_2)\phi_1(z_1) & \text{se } |z_2| > |z_1| \end{cases} \quad (2.79)$$

com um sinal negativo na expressão de baixo se a teoria for fermiônica. Uma OPE como (2.61), que só faz sentido no interior de uma função de correlação, deve então sempre ser calculada para $|z| > |w|$. A partir de agora consideraremos os campos ordenados radialmente, e com isso em mente prosseguiremos à expansão de Laurent do tensor de *stress*:

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}} \quad \text{e} \quad \bar{T}(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{L}_n}{\bar{z}^{n+2}}. \quad (2.80)$$

Essas relações podem ser facilmente invertidas multiplicando-se os dois lados por $z^{n'+1}$ e integrando em um curva fechada envolvendo o ponto $z = 0$:

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z) \quad \text{e} \quad \bar{L}_n = \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \bar{z}^{n+1} \bar{T}(\bar{z}), \quad (2.81)$$

e assim obtemos os geradores das transformações conformes. No produto de geradores precisamos levar em conta o ordenamento radial dos tensores de *stress*, de modo que

$$L_n L_m = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \oint_{C_1} dz \oint_{C_2} dw z^{n+1} w^{m+1} T(z) T(w) \quad (2.82)$$

fica definido somente quando $|z| > |w|$, ou seja, quando o contorno C_1 envolve o contorno C_2 , que por sua vez envolve a origem. Comutando L_n e L_m o contorno C_2 passa a envolver C_1 . A técnica comumente adotada para calcular as relações de comutação dos geradores é considerar um valor fixo de w e analisar a diferença entre os dois contornos da integração em z . Tomamos contornos circulares com raio $|w| \pm \varepsilon$, porém deformados para evitar o ponto $z = w$, e a diferença entre eles equivale a uma pequena curva C_w que envolve w . Isso está bem expresso na figura 2.2, de [12].

Dessa maneira o comutador fica

$$[L_n, L_m] = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \oint_{C_w} dz \oint dw z^{n+1} w^{m+1} T(z) T(w), \quad (2.83)$$

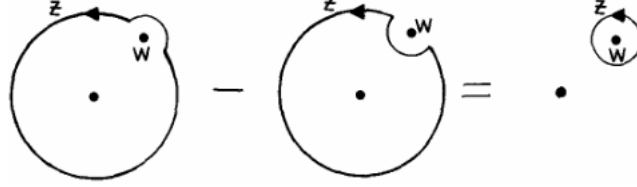


Figura 2.2: Diferença entre contornos

e a integral em z agora pode ser realizada pegando-se o pólo contido no produto $T(z)T(w)$ pela OPE (2.63), e aplicando-se a fórmula de diferenciação de Cauchy (2.57):

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{C_w} dz \oint dw z^{n+1} w^{m+1} \left(\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} \right) \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i} \left[\frac{c}{12} (n+1)n(n-1)w^{n+m-1} + 2(n+1)w^{n+m+1}T(w) + w^{n+m+2}\partial T(w) \right], \end{aligned}$$

o segundo termo contém o gerador L_{n+m} e o terceiro pode ser integrado por partes:

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= \frac{cn(n^2-1)}{12} \delta_{n+m,0} + 2(n+1)L_{n+m} - \frac{1}{2\pi i} \oint dw (n+m+2)w^{n+m+1}T(w) \\ &= \frac{cn(n^2-1)}{12} \delta_{n+m,0} + (n-m)L_{n+m}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

O cálculo de $[\bar{L}_n, \bar{L}_m]$ é idêntico, enquanto que $[L_n, \bar{L}_m] = 0$ segue diretamente da OPE trivial $T(z)\bar{T}(\bar{w}) \sim 0$ (já que T e \bar{T} não se acoplam). Resumindo, acabamos de encontrar a álgebra de Lie dos geradores:

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{cn(n^2-1)}{12} \delta_{n+m,0} \\ [L_n, \bar{L}_m] &= 0 \\ [\bar{L}_n, \bar{L}_m] &= (n-m)\bar{L}_{n+m} + \frac{cn(n^2-1)}{12} \delta_{n+m,0} \end{aligned} \quad (2.85)$$

trata-se do produto direto de duas cópias da famosa álgebra de Virasoro. Ela difere da álgebra (2.18) apenas pelo termo com a carga central. Sendo os coeficientes de uma espécie de expansão em modos do tensor de *stress*, os operadores L_n e \bar{L}_n serão interpretados como os geradores de transformações conformes no espaço de Hilbert da teoria, da mesma maneira que ℓ_n e $\bar{\ell}_n$ de (2.18) são os geradores dos mapeamentos conformes no espaço das funções. Notamos que quando n é igual a $-1, 0$ ou 1 o termo contendo a carga central desaparece e as álgebras coincidem, portanto o grupo $SL(2, \mathbb{C})$ no espaço de Hilbert é gerado pelos

operadores L_{-1}, L_0, L_1 e os respectivos operadores anti-holomórficos. Assim como antes, $(L_0 + \bar{L}_0)$ gera as dilatações $z \rightarrow \lambda z$, que na quantização radial equivalem a translações temporais, significando que esse operador deve ser proporcional ao Hamiltoniano.

2.8 Espaço de Hilbert

Ao construir os elementos do espaço de Hilbert suporemos a existência de um estado de vácuo $|0\rangle$ para então seguir um procedimento muito semelhante ao utilizado na teoria do momento angular da mecânica quântica. Consideramos que no passado remoto, $t \rightarrow -\infty$ ($z \rightarrow 0$ na quantização radial), os campos são livres e se reduzem a um único operador que age em $|0\rangle$ criando o estado assintótico chamado de entrada (*in*):

$$|\phi_{in}\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \phi(z, \bar{z}) |0\rangle. \quad (2.86)$$

A conjugação hermiteana deve ser feita com cuidado, pois no espaço de Minkowski há a mudança $it \rightarrow -it$ que não pode ser perdida na teoria euclideana. A troca do sinal no tempo euclideano $\tau \rightarrow -\tau$ equivale na quantização radial ao mapeamento $z \rightarrow 1/z^*$ (cf. equação 2.78), e por isso definimos na superfície real ($\bar{z} = z^*$):

$$\phi(z, \bar{z})^\dagger = \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \phi(1/\bar{z}, 1/z). \quad (2.87)$$

A dependência em z e \bar{z} que aparece na frente é necessária para que o adjunto tenha as propriedades tensoriais corretas sob o grupo conforme. Podemos ver que ela aparece ao criarmos um estado assintótico em $t \rightarrow \infty$, ou equivalentemente $z \rightarrow \infty$, nos mesmos moldes de $|\phi_{in}\rangle$. Realizando o mapeamento conforme $z = 1/w$ na esfera de Riemann e definindo o operador $\tilde{\phi}(w, \bar{w})$ nessas coordenadas, a definição natural é

$$\langle \phi_{out} | \equiv \lim_{w, \bar{w} \rightarrow 0} \langle 0 | \tilde{\phi}(w, \bar{w}). \quad (2.88)$$

Mas campos primários se transformam como (2.26), o que relaciona $\tilde{\phi}$ e ϕ :

$$\tilde{\phi}(w, \bar{w}) = \bar{w}^{-2h} w^{-2\bar{h}} \phi(1/\bar{w}, 1/w), \quad (2.89)$$

ou de acordo com (2.87) $\tilde{\phi} = \phi^\dagger$, resultando consistentemente em $\langle \phi_{out} | = |\phi_{in}\rangle^\dagger$.

A condição de hermiticidade do tensor de *stress* é obtida aplicando-se (2.87) em sua expansão (2.80):

$$T^\dagger(z) = T\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \frac{1}{\bar{z}^4} \Rightarrow \sum \frac{L_m^\dagger}{\bar{z}^{m+2}} = \sum \frac{1}{\bar{z}^4} \frac{L_m}{\bar{z}^{-m-2}}, \quad (2.90)$$

de onde concluímos que

$$L_m^\dagger = L_{-m}. \quad (2.91)$$

A mesma condição para \bar{T} nos dá $\bar{L}_m^\dagger = \bar{L}_{-m}$. Impondo ainda que $T(z)|0\rangle$ e $\bar{T}(\bar{z})|0\rangle$ sejam bem definidos em $z = 0$ ganhamos a restrição

$$L_n|0\rangle = \bar{L}_n|0\rangle = 0, \quad n \geq -1, \quad (2.92)$$

que implica a invariância do vácuo com respeito ao grupo conforme projetivo $SL(2, \mathbb{C})$ e junto com (2.91) fixa em zero o valor esperado de vácuo do tensor de *stress*.

Definimos o estado assintótico (2.86) criado por um campo primário $\phi(z, \bar{z})$ com dimensões conformes h, \bar{h} por

$$|h, \bar{h}\rangle \equiv \phi(0, 0)|0\rangle. \quad (2.93)$$

A partir da OPE (2.61) podemos calcular o comutador de um gerador com o campo, e em virtude do ordenamento temporal usamos novamente o truque da figura 2.2:

$$\begin{aligned} [L_n, \phi(w, \bar{w})] &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w dz z^{n+1} T(z) \phi(w, \bar{w}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w dz z^{n+1} \left[\frac{h\phi(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial\phi(w, \bar{w})}{z-w} \right] \\ &= h(n+1)w^n \phi(w, \bar{w}) + w^{n+1} \partial\phi(w, \bar{w}), \quad \text{para } n \geq -1, \end{aligned} \quad (2.94)$$

com uma versão anti-holomórfica idêntica. Usando isso com (2.93) temos

$$[L_0, \phi(0, 0)]|0\rangle = h\phi(0, 0)|0\rangle = h|h, \bar{h}\rangle, \quad (2.95)$$

mas $[L_0, \phi(0, 0)]|0\rangle = L_0\phi(0, 0)|0\rangle - \phi(0, 0)L_0|0\rangle = L_0|h, \bar{h}\rangle$, de modo que

$$L_0|h, \bar{h}\rangle = h|h, \bar{h}\rangle \quad \text{e equivalentemente} \quad \bar{L}_0|h, \bar{h}\rangle = \bar{h}|h, \bar{h}\rangle, \quad (2.96)$$

o que já havíamos adiantado no fim da seção 2.1. Em face à discussão final da seção anterior, vemos também que $|h, \bar{h}\rangle$ é auto-estado do Hamiltoniano. Estados que obedecem

a (2.96) são denominados estados de maior peso⁷, e em decorrência de (2.92) e (2.94) também obedecem a

$$L_n |h, \bar{h}\rangle = 0 \quad \text{para } n > 0. \quad (2.97)$$

Aplicando no entanto operadores $L_{-n_1} \cdots L_{-n_k}$ com ($n_i > 0$) obtemos os chamados estados descendentes, com autovalores diferentes. De (2.85) temos $[L_0, L_{-n}] = nL_{-n}$, e assim

$$\begin{aligned} L_0 \{L_{-n_1} \cdots L_{-n_k} |h, \bar{h}\rangle\} &= (n_1 L_{-n_1} \cdots L_{-n_k} + L_{-n_1} L_0 L_{-n_2} \cdots L_{-n_k}) |h, \bar{h}\rangle \\ &= \dots \\ &= (n_1 + \cdots + n_k + h) \{L_{-n_1} \cdots L_{-n_k} |h, \bar{h}\rangle\} \end{aligned} \quad (2.98)$$

mostrando que $L_{-n_1} \cdots L_{-n_k} |h, \bar{h}\rangle$ é um estado com dimensão conforme holomórfica ($n_1 + \cdots + n_k + h$). A semelhança com a teoria quântica do momento angular fica clara: L_0 funciona como a componente z do momento angular enquanto os operadores L_{-n_i} funcionam como operadores de escada que somam n_i à dimensão conforme. Porém ao contrário do que estamos acostumados na mecânica quântica, em uma álgebra de Lie infinita como a de Virasoro a hermiticidade dos geradores não garante a unitariedade das representações irredutíveis. Para que a teoria seja unitária, e assim uma teoria de campos consistente, o estado $L_{-n} |h\rangle$ (omitindo a parte anti-holomórfica⁸) deve ter norma positiva. Isso pode nos dar informações sobre os elementos essenciais da teoria:

$$\begin{aligned} \|L_{-n} |h\rangle\|^2 &= \langle h | L_{-n}^\dagger L_{-n} |h\rangle = \langle h | [L_n, L_{-n}] |h\rangle \\ &= \left[2nh + \frac{c}{12}(n^3 - n) \right] \langle h | h \rangle, \end{aligned} \quad (2.99)$$

em que usamos (2.91) e (2.97) na primeira linha e as propriedades da álgebra de Virasoro na segunda. Para $n = 1$ o segundo termo se anula e portanto a teoria é unitária apenas se as dimensões conformes de um operador primário forem maiores ou iguais a zero. Por outro lado, quando $n \gg 1$ o termo n^3 domina e a unitariedade implica que a carga central deve ser maior ou igual a zero.

De fato se $h = \bar{h} = 0$ então $L_{-1} |0\rangle = \bar{L}_{-1} |0\rangle = 0$, *i.e.*, $|h, \bar{h}\rangle$ é idêntico ao vácuo invariante por $SL(2, \mathbb{C})$. O caso $c = 0$ permite apenas uma representação unitária trivial para a álgebra de Virasoro, pois em (2.99) vemos que todos os estados descendentes $L_{-n} |0\rangle$

⁷Highest weight states.

⁸O estado físico completo pode ser visto como o produto tensorial $|h, \bar{h}\rangle = |h\rangle \otimes |\bar{h}\rangle$.

têm norma zero. Além disso, na referência [17] mostra-se que para um h qualquer a matriz de produtos internos $M_{ij} = \langle i|j \rangle$ na base 2×2 $L_{-2n}|h\rangle, L_n^2|h\rangle$ tem determinante $4n^3h^2(4h - 5n)$, que é negativo para um n suficientemente grande se $h \neq 0$, tornando a teoria não-unitária. Dessa forma, a única representação unitária possível é $h = 0$ e $L_n = 0 \forall n$.

O Modelo de Ising

Para ilustrar o uso das idéias discutidas analisaremos o mais simples dos modelos estatísticos que apresentam uma transição de fase contínua. Essa simplicidade é que torna o modelo de Ising, apresentado na sub-seção 1.2.2, um excelente laboratório para o estudo de transições de fase, e justamente por isso foi chamado por John Cardy de “o átomo de hidrogênio da área” [6]. Mas isso não significa que seja uma abstração pura: sua aplicabilidade em um grande número de sistemas físicos o torna ainda mais atraente. Exemplos incluem a descrição do ferromagnetismo (inspiração inicial do problema), a modelagem de um gás de rede, aproximações para redes neurais [18] e até mesmo o entendimento de padrões da dinâmica de terremotos [19].

3.1 Argumento de Peierls

É uma história muito conhecida dos físicos que o modelo, uma rede de spins interagentes segundo o hamiltoniano (1.1), foi na verdade proposto em sua versão unidimensional por Wilhelm Lenz ao seu então estudante de doutorado Ernst Ising em 1920. A solução publicada em 1924 [20] mostrou-se de certa forma decepcionante em virtude da ausência de uma transição de fase, e diz-se sarcasticamente que por isso o modelo acabou levando o nome do estudante. Independente da veracidade da história, hoje são conhecidos argumentos simples para mostrar que em 1d a transição não ocorre, geralmente baseados no custo de energia livre para inserir desordem na fase ordenada. Suponha por exemplo uma cadeia de Ising 1d de comprimento L ferromagnética, *i.e.*, na qual os spins tendem a se alinhar. No estado de mais baixa energia podemos ter todos os spins “apontando para baixo” ou todos “apontando para cima”. A pergunta é: qual o custo de energia livre para criar uma parede de domínio, virando todos os spins a partir de uma dada posição? Uma

parede criada contribui com um aumento de energia de $2J$ (em conseqüência da interação dos spins na fronteira), mas ela pode ser criada em qualquer um dos L sítios da cadeia de modo que a entropia associada a essas configurações é da ordem de $k_B \ln L$. A diferença de energia livre é $F = E - TS \sim 2J - k_B T \ln L$ e no limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$) esse valor é negativo para qualquer temperatura acima de zero. A criação de domínios sempre reduz a energia livre e, portanto, não há uma fase ordenada estável.

Em duas dimensões no entanto a situação é diferente. Em 1936 Rudolf Peierls estendeu o raciocínio acima, no que ficou conhecido como argumento de Peierls, e mostrou que nesse caso deveria haver uma transição de fase [21]. Uma parede de domínio de perímetro total L envolve agora uma energia de cerca de $2JL$ em decorrência da interação dos spins na fronteira. Para estimar a entropia, pensamos na parede como um passeio aleatório em uma rede quadrada: ligamos dois sítios e no próximo passo temos três possíveis escolhas de caminho, depois mais três opções e assim por diante até completarmos os L passos. É claro que nem sempre temos as três opções de caminho pois a curva não pode se cruzar e também deve ser fechada. Esperamos dessa forma que o número de configurações possíveis deva comportar-se aproximadamente como μ^L , para um $\mu < 3$, mas ainda maior que 1. A entropia associada é $k_B \ln \mu^L$, e o custo de energia livre para a formação de um domínio fica $F = 2JL - k_B T \ln \mu^L = L(2J - k_B T \ln \mu)$. Vemos que para uma temperatura suficientemente baixa a fase ordenada é estável, pois o custo de energia livre para a criação de domínios de spins invertidos torna-se desfavorável. Quando T está acima de um valor crítico, da ordem de J/k_B , a diferença de energia livre é negativa, favorecendo a quebra do sistema em vários domínios. A transição de fase está assim caracterizada.

O cálculo exato dos expoentes críticos do modelo em duas dimensões foi realizado apenas em 1944 por Lars Onsager, no já citado artigo [10]. O conhecimento prévio das soluções (também já expostas aqui na tabela 1.1) permitirá a comparação com o que obtivermos usando os métodos de teorias conformes.

3.2 Teoria Fermiônica

A solução de Onsager, considerada um verdadeiro *tour de force*, envolve técnicas de matriz de transferência mas já contém idéias da relação do modelo com uma teoria de férmions. Bruria Kaufman foi o responsável pela simplificação com a introdução de variá-

veis fermiônicas [22], porém Schultz, Mattis e Lieb [23] que aplicaram esse método em um artigo notável para criar uma solução elegante e simples. A idéia foi seguir o procedimento de rotular uma das dimensões como “tempo”, escrever a matriz de transferência com o hamiltoniano quântico definido em (1.29) e então realizar transformações adequadas. No limite de tempos pequenos temos $\mathcal{T} \approx 1 - \tau H$ com (veja [24])

$$H = -\lambda \sum_i \sigma_i^z - \sum_i \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x, \quad (3.1)$$

onde σ^x e σ^z são as matrizes de Pauli e λ depende essencialmente de T/T_c ($\lambda = 1$ no ponto crítico). O primeiro passo é introduzir os operadores

$$a_j = \frac{1}{2} (\sigma_j^x - i\sigma_j^y) \quad \text{e} \quad a_j^\dagger = \frac{1}{2} (\sigma_j^x + i\sigma_j^y), \quad (3.2)$$

com isso $\sigma_j^z = 2a_j^\dagger a_j - 1$ e H fica quadrático, porém não pode ser diagonalizado pois a_i e a_j^\dagger têm relações de comutação misturadas: comutam quando $i \neq j$, comportamento de variáveis bosônicas, porém têm anticomutador igual a 1 quando $i = j$, como variáveis fermiônicas. A solução vem com as transformações de Jordan-Wigner

$$\begin{aligned} c_j &= \exp\left(i\pi \sum_{k=0}^{j-1} a_k^\dagger a_k\right) a_j \\ c_j^\dagger &= a_j^\dagger \exp\left(-i\pi \sum_{k=0}^{j-1} a_k^\dagger a_k\right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

que introduz variáveis fermiônicas, pois

$$\{c_i^\dagger, c_j\} = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \{c_i^\dagger, c_j^\dagger\} = \{c_i, c_j\} = 0. \quad (3.4)$$

Definimos então os espinores reais

$$\psi_L(j) = \frac{(-1)^j}{\sqrt{2a}} (c_j^\dagger e^{-i\pi/4} + c_j e^{i\pi/4}) \quad \text{e} \quad \psi_R(j) = \frac{(-1)^j}{\sqrt{2a}} (c_j^\dagger e^{i\pi/4} + c_j e^{-i\pi/4}), \quad (3.5)$$

chamados férmions de Kaufman-Onsager (a é a distância entre sítios). Apenas reescalando o hamiltoniano verifica-se [25] que as equações de movimento para essas variáveis no limite contínuo ($a \rightarrow 0$, $ja \rightarrow x$) podem ser obtidas de

$$H = \frac{1}{2} \int dx \left[-i\Psi(x)\gamma^0\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x) + m\Psi(x)\gamma^0\Psi(x) \right], \quad (3.6)$$

com

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_R(x) \\ \psi_L(x) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

$$m = \frac{\lambda - 1}{a}, \quad (3.8)$$

e as matrizes γ de Dirac na representação de Majorana na qual são imaginárias:

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Vemos assim que Ψ é um férmion auto-adjunto de Majorana. No ponto crítico ($\lambda = 1$) a teoria é sem massa e não possui escala (uma vez que já fizemos $a \rightarrow 0$ no limite contínuo), e por isso trata-se de uma teoria invariante conforme.

3.3 Férmion Livre

Para resolver o modelo de Ising com os métodos de teorias conformes analisaremos um sistema fermiônico de Majorana livre sem massa em (1+1) dimensões, cuja ação é

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi. \quad (3.10)$$

Em um espaço euclidiano podemos reescrever S em função das componentes espinoriais $(\psi, \bar{\psi})$ de Ψ como

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2x (\psi \bar{\partial} \psi + \bar{\psi} \partial \bar{\psi}), \quad (3.11)$$

onde abreviamos $\partial \equiv \partial_z$ e $\bar{\partial} \equiv \partial_{\bar{z}}$. As equações clássicas de movimento são $\bar{\partial} \psi = 0$ e $\partial \bar{\psi} = 0$, cujas soluções são quaisquer funções $\psi(z)$ e $\bar{\psi}(\bar{z})$ holomórficas e anti-holomórficas respectivamente. Nosso objetivo principal será calcular OPEs como (2.61) e (2.63), mas para isso precisamos do propagador e do tensor de *stress* da teoria.

Com a ação escrita na forma $S = \frac{1}{2} \int \phi A \phi$, o propagador é dado pelo inverso do operador A . Em (3.11) temos esse formato para os campos ψ e $\bar{\psi}$ com os operadores $\bar{\partial}/\pi$ e ∂/π respectivamente, portanto o propagador $G_2 = \langle \psi(z) \psi(0) \rangle$ fica definido por

$$\frac{1}{\pi} \bar{\partial} G_2 = \delta(\vec{x}) = \delta(z). \quad (3.12)$$

Inspirados no eletromagnetismo, escrevemos $G_2 = \partial H$ obtendo

$$\bar{\partial} \partial H = \frac{1}{4} \nabla^2 H = \pi \delta(\vec{x}), \quad (3.13)$$

uma vez que $\bar{\partial}\partial = (\frac{1}{2}\partial_0 + i\partial_1)(\frac{1}{2}\partial_0 - i\partial_1) = \frac{1}{4}(\partial_0^2 + \partial_1^2)$, com $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$. H portanto é a função de Green da equação de Laplace em duas dimensões, funcionando como o potencial elétrico 2d de uma carga pontual centrada em $z = 0$. A solução conhecida é

$$H = 2 \ln |\vec{x}| = 2 \ln [(z\bar{z})^{1/2}] = (\ln z + \ln \bar{z}) . \quad (3.14)$$

De fato, para uma função qualquer $f(\vec{x})$ que vá a zero no limite $x \equiv |x| \rightarrow \infty$, usando o teorema de Gauss em duas dimensões temos:

$$\begin{aligned} \int d^2x \nabla^2 \ln(x) f(\vec{x}) &= \int d^2x \left\{ \nabla \cdot [f(\vec{x}) \nabla \ln x] - \nabla \ln x \cdot \nabla f(\vec{x}) \right\} \\ &= \oint_{\infty} ds \hat{x} \cdot \frac{\vec{x}}{x^2} f(\vec{x}) - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} dr \partial_r f(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} d\theta f(r=0) \\ &= 2\pi f(0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \ln x = 2\pi \delta(x) . \quad \blacksquare$$

Fizemos também uso do resultado $\nabla \ln x = \vec{x}/x^2$ e de coordenadas polares para a integral de volume. Voltando então ao propagador:

$$\langle \psi(z) \psi(0) \rangle = \partial H = \frac{1}{z} , \quad (3.15)$$

e por simetria de translação podemos escrever

$$\langle \psi(z) \psi(w) \rangle = \frac{1}{(z-w)} . \quad (3.16)$$

Um procedimento idêntico nos leva a

$$\langle \bar{\psi}(\bar{z}) \bar{\psi}(\bar{w}) \rangle = \frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})} , \quad (3.17)$$

enquanto ψ e $\bar{\psi}$ não se acoplam:

$$\langle \psi(z) \bar{\psi}(\bar{w}) \rangle = 0 . \quad (3.18)$$

Derivando o propagador temos outras funções de dois pontos que serão úteis:

$$\langle \partial_z \psi(z) \psi(w) \rangle = -\frac{1}{(z-w)^2} \quad \text{e} \quad \langle \partial_z \psi(z) \partial_w \psi(w) \rangle = -\frac{2}{(z-w)^3} . \quad (3.19)$$

O tensor de *stress* é calculado a partir da expressão da corrente conservada de Noether

$$-\frac{T^{\mu\nu}}{2\pi} = -\eta^{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi , \quad (3.20)$$

sendo \mathcal{L} a lagrangeana e ϕ um dos campos. O fator $-1/2\pi$ aparece em razão da definição que usamos em (2.46) (o raio da hipersfera de raio 1 em duas dimensões é $S_d = 2\pi$). Podemos trabalhar com coordenadas complexas z, \bar{z} no entanto é preciso expressar a métrica em função delas. No espaço euclideo de coordenadas reais x^0 e x^1 a métrica é diagonal: $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dx^0)^2 + (dx^1)^2$. Com a mudança de coordenadas (2.13) temos

$$ds^2 = \frac{1}{4}(dz + d\bar{z})^2 - \frac{1}{4}(dz - d\bar{z})^2 = dzd\bar{z}, \quad (3.21)$$

portanto para escrevermos $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, em que agora x^μ refere-se a z ou \bar{z} , a métrica deve ser

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Dessa maneira, (3.20) dá:

$$T^{zz} = -\bar{\psi} \left(\eta^{zz} \partial \bar{\psi} + \eta^{z\bar{z}} \bar{\partial} \bar{\psi} \right) = -2\bar{\psi} \bar{\partial} \bar{\psi} \quad (3.23)$$

$$T^{\bar{z}\bar{z}} = -\psi \left(\eta^{\bar{z}\bar{z}} \partial \psi + \eta^{\bar{z}z} \bar{\partial} \psi \right) = -2\psi \partial \psi. \quad (3.24)$$

Da definição (2.55) extraímos a componente holomórfica

$$T(z) = T_{zz} = \eta_{z\mu} \eta_{z\nu} T^{\mu\nu} = \frac{1}{4} T^{\bar{z}\bar{z}} = -\frac{1}{2} : \psi \partial \psi : \quad (3.25)$$

que deve ter ordenamento normal para garantir que o valor esperado de vácuo seja nulo.

Com (3.16), (3.19) e (3.25) estamos prontos para o cálculo das OPEs, que se torna um exercício de aplicação do Teorema de Wick.

$$\begin{aligned} T(z)\psi(w) &= -\frac{1}{2} : \psi(z) \partial \psi(z) : \psi(w) = -\frac{1}{2} \left(T\{\psi(z) \partial \psi(z) \psi(w)\} - : \overline{\psi(z) \partial \psi(z) \psi(w)} : \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(: \psi(z) \partial \psi(z) \psi(w) : - : \overline{\psi(z) \partial \psi(z) \psi(w)} : + : \psi(z) \overline{\partial \psi(z) \psi(w)} : \right) \\ &\sim \frac{1}{2} \frac{\partial \psi(z)}{z-w} + \frac{1}{2} \frac{\psi(z)}{(z-w)^2} \\ &\sim \frac{1}{2} \frac{\psi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial \psi(w)}{z-w}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde desconsideramos o termo com ordenamento normal uma vez que seu valor esperado é nulo (e OPEs só fazem sentido no interior de uma função de correlação) e na última linha expandimos $\psi(z)$ ao redor de $z = w$, descartando os termos regulares. Vemos

que as dimensões conformes de ψ são $(h, \bar{h}) = (1/2, 0)$ e analogamente para $\bar{\psi}$ temos $(h, \bar{h}) = (0, 1/2)$, resultado em acordo com o fato de que campos fermiônicos têm spin $1/2$.

A OPE do tensor de *stress* consigo mesmo é calculada de forma semelhante, envolvendo no entanto um número maior de contrações. Apresentamos aqui apenas o resultado:

$$T(z)T(w) = \frac{1}{4} : \psi(z) \partial_z \psi(z) : : \psi(w) \partial_w \psi(w) : \quad (3.27)$$

$$\sim \frac{1/4}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w}. \quad (3.28)$$

Essa equação mostra que a carga central de uma teoria de férmions livres é $c = 1/2$, e pelo que discutimos na seção anterior essa deve ser a carga central do modelo de Ising.

3.4 Modelos Mínimos

Encontrados os parâmetros fundamentais, precisamos identificar os operadores de escala da teoria. Já dissemos anteriormente que o modelo de Ising possui dois operadores de escala, chamados de spin $\sigma(\vec{x})$ e densidade de energia $\varepsilon(\vec{x})$, e veremos que outro é a identidade (que se transforma com dimensão de escala zero). O chamado conteúdo de operadores de uma teoria é dado por uma tabela que relaciona os possíveis operadores e as respectivas dimensões conformes, e sua origem está na discussão sobre unitariedade que iniciamos na seção 2.8. Naquela seção mostramos que uma condição necessária para a unitariedade é $c \geq 0, h \geq 0$ apenas impondo positividade na norma de um estado $L_{-n} |0\rangle$. O matemático russo Victor Kac sugeriu [26] uma generalização do argumento para um estado qualquer relacionando os possíveis valores de c e h de uma teoria conforme unitária com $c > 0$, encontrando assim uma condição necessária mais restritiva. Ele obteve o determinante da matriz de produtos internos $\langle i|j\rangle$ dos estados de ordem n (criados pelos geradores de Virasoro $L_{-n}, L_{-n+1}L_{-1}, \dots, L_{-1}^n$) que ficou conhecido como determinante de Kac e que deve ser não negativo em teorias unitárias:

$$\det_n(c, h) = a_n \prod_{\substack{r,s \geq 1 \\ rs \leq n}} [h - h_{r,s}(c)]^{p(n-rs)}, \quad (3.29)$$

sendo a_n uma constante positiva e $p(k)$ a partição do inteiro k (número de maneiras de escrever k como uma soma). Com a parametrização da carga central

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \quad (3.30)$$

(m em princípio pode ser até mesmo complexo) as raízes são dadas por

$$h_{r,s}(m) = \frac{[r(m+1) - sm]^2 - 1}{4m(m+1)}. \quad (3.31)$$

Somente cinco anos depois Friedan, Qiu e Shenker obtiveram as condições necessárias e suficientes para a unitariedade [27]. Eles mostraram que se $c > 1$, a teoria é unitária para qualquer $h \geq 0$ porém possui infinitos operadores primários. Por outro lado, quando $c < 1$ (o nosso interesse), a teoria é unitária apenas para h igual a um dos h_{rs} de (3.31) com as restrições adicionais de que m seja um número natural maior que 2 ($m = 2$ dá a teoria trivial $c = 0$), e r e s sejam tais que $1 \leq r \leq m - 1$ e $1 \leq s < m$. Isso limita o número de dimensões conformes possíveis e por conseguinte o número de operadores primários (é interessante notar que $h_{rs} = h_{m-r, m+1-s}$, isto é, as dimensões conformes existentes são contadas duas vezes). Modelos com um número finito de operadores primários, unitários ou não, são ditos modelos mínimos, e se obedecem a (3.30) e (3.31) com as restrições acima são ditos modelos mínimos unitários.

A cada h_{rs} corresponde um operador primário denominado ϕ_{rs} (também contado duas vezes por causa da simetria $\phi_{rs} = \phi_{m-r, m+1-s}$). Os valores possíveis de h_{rs} para um dado m são organizados na chamada Tabela de Kac. As três primeiras ($m = 3, 4, 5$) estão a seguir:

$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$																																																																										
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">1/2</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">1/16</td><td style="padding: 2px;">1/16</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">1</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">1/2</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">s</td><td style="padding: 2px;">1</td><td style="padding: 2px;">2</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">r</td><td></td><td></td></tr> </table>	3	1/2	0	2	1/16	1/16	1	0	1/2	s	1	2	r			<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td style="padding: 2px;">4</td><td style="padding: 2px;">3/2</td><td style="padding: 2px;">7/16</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">3/5</td><td style="padding: 2px;">3/80</td><td style="padding: 2px;">1/10</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">1/10</td><td style="padding: 2px;">3/80</td><td style="padding: 2px;">3/5</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">1</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">7/16</td><td style="padding: 2px;">3/2</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">s</td><td style="padding: 2px;">1</td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">3</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">r</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	4	3/2	7/16	0	3	3/5	3/80	1/10	2	1/10	3/80	3/5	1	0	7/16	3/2	s	1	2	3	r				<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td style="padding: 2px;">5</td><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">7/5</td><td style="padding: 2px;">2/5</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">4</td><td style="padding: 2px;">13/18</td><td style="padding: 2px;">21/40</td><td style="padding: 2px;">1/40</td><td style="padding: 2px;">1/8</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">2/3</td><td style="padding: 2px;">1/15</td><td style="padding: 2px;">1/15</td><td style="padding: 2px;">2/3</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">1/8</td><td style="padding: 2px;">1/40</td><td style="padding: 2px;">21/40</td><td style="padding: 2px;">13/18</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">1</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">2/5</td><td style="padding: 2px;">7/5</td><td style="padding: 2px;">3</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">s</td><td style="padding: 2px;">1</td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">r</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	5	3	7/5	2/5	0	4	13/18	21/40	1/40	1/8	3	2/3	1/15	1/15	2/3	2	1/8	1/40	21/40	13/18	1	0	2/5	7/5	3	s	1	2	3	4	r				
3	1/2	0																																																																										
2	1/16	1/16																																																																										
1	0	1/2																																																																										
s	1	2																																																																										
r																																																																												
4	3/2	7/16	0																																																																									
3	3/5	3/80	1/10																																																																									
2	1/10	3/80	3/5																																																																									
1	0	7/16	3/2																																																																									
s	1	2	3																																																																									
r																																																																												
5	3	7/5	2/5	0																																																																								
4	13/18	21/40	1/40	1/8																																																																								
3	2/3	1/15	1/15	2/3																																																																								
2	1/8	1/40	21/40	13/18																																																																								
1	0	2/5	7/5	3																																																																								
s	1	2	3	4																																																																								
r																																																																												

Os modelos usuais da física estatística no ponto crítico são freqüentemente realizações de modelos mínimos unitários. A correspondência entre eles é feita comparando-se as dimensões (de escala) dos operadores de escala conhecidos com as dimensões conformes dos operadores primários. Listamos aqui os primeiros modelos mínimos unitários não triviais e o modelo estatístico equivalente, identificados em [27]:

$m = 3$: de (3.30) vemos que a carga central é $c = 1/2$, ou seja, trata-se do Modelo de

Ising que estudaremos adiante.

$m = 4$: equivale ao Modelo de Ising Tricrítico, $c = 7/10$, uma rede semelhante à de Ising, mas que no entanto inclui a possibilidade de sítios não estarem ocupados, e assim o número total de spins é variável.

$m = 5$: um subconjunto dos operadores dessa teoria descreve o Modelo de Potts com 3 Estados, $c = 4/5$, uma rede em que os spins podem assumir três valores diferentes. Pares de spins vizinhos com mesmos valores contribuem com energia -1 e os demais pares não contribuem.

$m = 6$: descreve o Modelo de Potts com 3 Estados Tricrítico, $c = 6/7$.

3.5 Solução

Nossa tarefa será analisar as propriedades dos operadores existentes no modelo de Ising, *i.e.*, no modelo mínimo unitário com $m = 3$. É importante notar que a seção anterior versou sobre a parte holomórfica da teoria (partindo dos geradores L_n e dimensões conformes h), no entanto uma discussão semelhante pode ser realizada com os geradores \bar{L}_n e as dimensões \bar{h} . Como o modelo de Ising possui uma componente $\bar{T}(\bar{z})$ do tensor de *stress* não nula, não podemos desprezar a parte anti-holomórfica, e a escolha mais simples para seu conteúdo de operadores são os campos $\Phi_{rs} \equiv \phi_{rs}(z)\bar{\phi}_{rs}(\bar{z})$ cujas dimensões conformes (h, \bar{h}) são

$$\Phi_{1,1} = \Phi_{2,3} : (0, 0) \quad \Phi_{1,2} = \Phi_{2,2} : \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right) \quad \Phi_{2,1} = \Phi_{1,3} : \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (3.32)$$

Impondo invariância modular (invariância por $SL(2, \mathbb{Z})$ com a teoria definida em um toro) demonstra-se que essa é a única escolha possível (cf. [7], capítulo 10).

O campo $\Phi_{1,1}$ se transforma de maneira trivial e por isso é interpretado como o operador identidade, enquanto os outros dois devem ser identificados com os operadores de spin e densidade de energia. Podemos até considerar esse um procedimento *a posteriori*, comparando as dimensões de escala que obtivermos, mas há pelo menos uma razão para interpretarmos $\Phi_{2,1}$ como o operador densidade de energia. Como o campo fermiônico ψ possui $h = 1/2$, temos $\Phi_{2,1} = \bar{\psi}\psi$. Um pouco fora do ponto crítico a simetria conforme é

quebrada com a introdução de um termo de massa na ação de Majorana, e isso pode ser visto como uma perturbação da teoria livre por um operador de energia:

$$m \int \bar{\psi}(\bar{z})\psi(z) \propto (T - T_c) \int \varepsilon(z, \bar{z}). \quad (3.33)$$

Surge mais uma vez a relação entre m e $(T - T_c)$ que já apareceu em (3.8), uma vez que lá $\lambda = T/T_c$. Nessa relação está a chave para obtermos o primeiro expoente crítico da teoria. Vimos que para o campo fermiônico sem massa a função de correlação é dada por (3.16), no entanto uma característica geral de campos massivos é que as funções de correlação para grandes distâncias decaem exponencialmente como $\sim \exp(-mr)$, em outras palavras, com um comprimento de correlação igual ao inverso da massa:

$$\xi \sim \frac{1}{m}. \quad (3.34)$$

Portanto a relação entre m e $(T - T_c)$ no Modelo de Ising nos dá

$$\xi \sim \frac{1}{T - T_c}, \quad (3.35)$$

mostrando o expoente crítico $\nu = 1$, em acordo com a tabela 1.1.

Tendo isso funcionado bem, prosseguimos na tentativa de identificar o operador $\Phi_{1,2}$ com o operador de spin σ . A relação entre σ e os campos fermiônicos $\psi, \bar{\psi}$ é não local, o que não nos permite expressá-lo de forma simples. Mas como $\Phi_{1,2}$ é um campo sem spin (uma vez que $h = \bar{h}$) podemos usar diretamente a equação (2.35) para encontrar o expoente η . A dimensão de escala de $\Phi_{1,2}$ é calculada somando-se as duas expressões de (2.24)

$$\Delta = h + \bar{h} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}, \quad (3.36)$$

e substituindo então em (2.35) temos

$$\eta = 2\Delta + 2 - d = 2\Delta = \frac{1}{4}, \quad (3.37)$$

novamente de acordo com o valor conhecido, mostrado na tabela 1.1. Os demais expoentes podem ser calculados a partir das relações (1.21), (1.22), (1.23) e (1.24).

O resultado é bastante expressivo, mas o poder da invariância conforme não pára por aí. O cálculo dos expoentes críticos é um primeiro passo importantíssimo para a identificação de uma teoria, todavia, para que uma classe de universalidade fique delineada

precisamos de mais informações: as funções de n pontos. Duas teorias críticas com os mesmos expoentes críticos não podem ser ditas equivalentes, mas se possuírem as mesmas funções de n pontos sim porque nesse caso as funções de partição são equivalentes. Uma das realizações mais impressionantes do artigo BPZ foi a demonstração de que as funções de correlação de operadores primários da teoria obedecem a certas equações diferenciais e, portanto, podem em princípio ser determinadas. Mostraremos como construir essas equações no modelo de Ising. O ponto de partida é notar que alguns estados descendentes de um estado de maior peso $|h\rangle$ (2.96) podem ser linearmente dependentes. Suponhamos que isso aconteça no segundo nível, *i.e.*, nos estados descendentes gerados por L_{-2} e L_{-1}^2 . Então, para alguma constante a vale

$$L_{-2}|h\rangle + aL_{-1}^2|h\rangle = 0. \quad (3.38)$$

O estado $(L_{-2} + aL_{-1}^2)|h\rangle$ é chamado estado descendente nulo. Aplicando em (3.38) o operador L_1 , lembrando que $L_1|h\rangle = 0$, $L_0|h\rangle = h|h\rangle$ e utilizando (2.85) podemos escrever:

$$\begin{aligned} 0 &= L_{-2}|h\rangle + aL_{-1}^2|h\rangle = ([L_1, L_{-2}] + a[L_1, L_{-1}^2])|h\rangle \\ &= (3L_{-1} + 2aL_{-1}L_0 + 2aL_0L_{-1})|h\rangle = (3 + 2a(2h + 1))L_{-1}|h\rangle, \end{aligned} \quad (3.39)$$

o que implica $a = -3/(4h + 2)$. Aplicando agora L_2 em (3.38) temos

$$\begin{aligned} 0 &= L_{-2}|h\rangle + aL_{-1}^2|h\rangle = ([L_2, L_{-2}] + a[L_2, L_{-1}^2])|h\rangle \\ &= \left(4L_0 + \frac{c}{6} + 3aL_1L_{-1}\right)|h\rangle = \left(4h + \frac{c}{2} + 6ah\right)|h\rangle = 0, \end{aligned} \quad (3.40)$$

dando a restrição $c = -2h(6a + 4)$. A substituição de a como função de h resulta em $c = 2h(5 - 8h)/(2h + 1)$, ou seja, o operador de escala ϕ de uma teoria de carga central c cuja dimensão conforme h obedece a essa relação satisfaz

$$\left(L_{-2} - \frac{3}{2(2h + 1)}L_{-1}^2\right)\phi = 0. \quad (3.41)$$

De (2.94) tiramos $[L_{-1}, \phi] = \partial\phi$, e aplicando esse comutador ao vácuo temos

$$\partial\phi|0\rangle = [L_{-1}, \phi]|0\rangle = L_{-1}\phi|0\rangle + \phi L_{-1}|0\rangle, \quad (3.42)$$

mas como $L_{-1}|0\rangle = 0$ (2.92), então¹ $L_{-1}\phi = \partial\phi$ e (3.38) fica

$$L_{-2}\phi = -aL_{-1}^2\phi = -a\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi(z). \quad (3.43)$$

¹(3.41) deve ser vista como se aplicada sobre o vácuo, pois $|h\rangle = \phi|0\rangle$

Para montar a equação diferencial que buscamos precisamos escrever o operador L_{-2} de uma outra maneira e com esse intuito usaremos a expansão de Laurent do tensor de *stress* (2.80) porém realizada ao redor de $z = w$ em vez de $z = 0$. Como $L_n |h\rangle = 0$ para $n > 0$ manteremos apenas os termos com $n \leq 0$:

$$T(z) = \sum_{n \leq 0} \frac{L_n}{(z-w)^{-n-2}} = \frac{L_0}{(z-w)^2} + \frac{L_{-1}}{(z-w)} + L_{-2} + (z-w)L_{-3} + \dots \quad (3.44)$$

Do ponto de vista operatorial, essa equação mostra que atuando em um campo $\phi(w, \bar{w})$ temos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} L_{-2}\phi(w, \bar{w}) &= \lim_{z \rightarrow w} \left[T(z)\phi(w, \bar{w}) - \frac{L_0\phi(w, \bar{w})}{(z-w)^2} - \frac{L_{-1}\phi(w, \bar{w})}{z-w} \right] \\ &= \left(T(z) - \frac{h}{(z-w)^2} - \frac{\partial_w}{z-w} \right)_{z \rightarrow w} \phi(w, \bar{w}). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Usando (3.43) e (3.45) é possível escrever de duas maneiras diferentes a função de correlação $\langle [L_{-2}\phi_1(w_1, \bar{w}_1)] \phi_2(w_2, \bar{w}_2) \cdots \phi_n(w_n, \bar{w}_n) \rangle$ (suprimindo as dependências nas variáveis \bar{w}_i para não carregar a notação):

$$-a \frac{\partial^2}{\partial w_1^2} \langle \phi_1(w_1) \cdots \phi_n(w_n) \rangle = \left\langle \left(T(z) - \frac{h_1}{(z-w_1)^2} - \frac{\partial_{w_1}}{z-w_1} \right)_{z \rightarrow w_1} \phi_1(w_1) \cdots \phi_n(w_n) \right\rangle. \quad (3.46)$$

Aplicando a identidade de Ward conforme local (2.60) ao primeiro termo do lado direito:

$$-a \frac{\partial^2}{\partial w_1^2} \langle \phi_1(w_1) \cdots \phi_n(w_n) \rangle = \sum_{j \neq 1} \left(\frac{h_j}{(w_1 - w_j)^2} + \frac{\partial_{w_j}}{w_1 - w_j} \right) \langle \phi_1(w_1) \cdots \phi_n(w_n) \rangle. \quad (3.47)$$

Construímos assim uma equação diferencial de segunda ordem para qualquer função de n -pontos que inclua um campo primário ϕ_1 com um descendente nulo no segundo nível, ou seja, cujo estado associado satisfaça (3.38).

Vimos que esses campos possuem dimensão conforme h tal que $c = 2h(5-8h)/(2h+1)$. No modelo de Ising ($c = 1/2$) isso nos dá uma equação de segundo grau com soluções $h = 1/2$ e $h = 1/16$, justamente as dimensões conformes dos operadores $\Phi_{2,1}$ e $\Phi_{1,2}$ de (3.32) (vale lembrar mais uma vez que o procedimento acima também se aplica à parte anti-holomórfica da teoria). Não se trata de uma mera coincidência: do determinante de Kac é possível mostrar que o estado com dimensão conforme h_{pq} possui um descendente nulo no nível $p \times q$ [12]. O importante para a nossa discussão é que os operadores de spin

e densidade de energia no modelo de Ising possuem descendentes nulos no segundo nível e portanto suas funções de correlação obedecem a (3.47), com $a = -3/(4h + 2)$. As funções de correlação do operador spin ($h = 1/16$) por exemplo são determinadas a partir de

$$\left[\frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} - \sum_{j \neq i}^N \left(\frac{1/16}{(z_i - z_j)^2} + \frac{1}{z_i - z_j} \frac{\partial}{\partial z_j} \right) \right] \langle \sigma(z_1, \bar{z}_1) \cdots \sigma(z_N, \bar{z}_N) \rangle = 0. \quad (3.48)$$

A solução para a função de quatro pontos foi encontrada ainda no artigo BPZ, e existem variados métodos para encontrar outras soluções fisicamente relevantes [7, 12].

Evolução de Schramm-Loewner Estocástica

Todo arcabouço teórico construído a partir do artigo BPZ obteve grande sucesso na descrição de aspectos algébricos da simetria conforme (embora nem sempre com argumentos matematicamente rigorosos), porém propriedades geométricas não são claramente identificadas nos métodos consagrados. Em 1992 John Cardy obteve um avanço nesse sentido, conjecturando para o problema de percolação crítica a probabilidade de existir um *cluster* ligando dois segmentos na fronteira de uma região simplesmente conexa [28], mas o resultado acabou aumentando a insatisfação dos matemáticos com a falta de rigor desses métodos. Na referência [29] (a principal referência deste capítulo junto a [30, 31, 32]) o próprio Cardy aponta preocupações tipicamente presentes no ponto de vista de um matemático (traduções livres): “O que exatamente são esses operadores locais renormalizados cujas funções de correlação os teóricos de campos manipulam tão alegremente, seguindo regras que às vezes parecem mais convenções culturais do que lógica rigorosa?” “O que realmente significa simetria conforme, e que objeto é de fato invariante conforme?”

4.1 Curvas Aleatórias e Modelos Estatísticos

Para atacar esses problemas a saída foi desistir de buscar definições rigorosas para os operadores das teorias de campos e analisar as curvas que formam as paredes de domínios na rede, observando o comportamento de suas medidas no limite contínuo. Seja por exemplo o modelo de Ising em uma rede triangular representado na figura 4.1, de [29]. Os spins estão localizados no centro dos hexágonos da rede dual, e as paredes de domínio separando os positivos dos negativos estão destacadas. Notamos que as curvas definidas

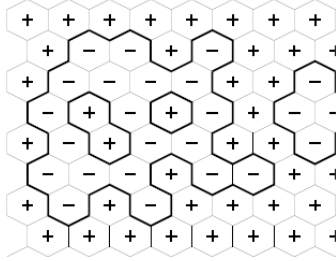


Figura 4.1: Ising triangular

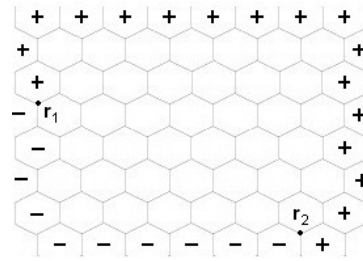


Figura 4.2: Contorno fixo

pelas paredes são fechadas, mas fixando condições de contorno é possível gerar curvas abertas. Para garantir a existência de uma curva γ ligando dois pontos r_1 e r_2 na fronteira basta fixar todos os spins entre eles em $+1$ (no sentido horário, começando em r_1) e os demais em -1 , como mostrado na figura 4.2. Gerando as configurações dos spins restantes podemos identificar γ , e diferentes realizações dão origem a um *ensemble* de curvas. SLE descreve o limite contínuo dessas curvas.

Uma propriedade muito importante para nossos objetivos é a possibilidade de gerar γ passo a passo em um processo de exploração. Na parte inferior da rede fixamos os spins à esquerda do ponto de partida em -1 (ou “para baixo”) e os à direita em $+1$ (ou “para cima”). A configuração do sítio localizado entre a interface de contato é então gerada (levando-se em consideração a condição de contorno), e isso fará com que a parede de domínio vire à esquerda ou à direita. Gera-se então a configuração do sítio à frente da curva repetindo-se o procedimento. O processo pode então ser visto como um passeio pela rede dual que vira à esquerda quando o spin em sua frente está para cima e à direita quando está para baixo, resultando em uma curva cujos sítios logo à esquerda têm spin para baixo enquanto os logo à direita têm spin para cima, como mostra a figura 4.3 também de [29]. A probabilidade de virar à esquerda ou à direita em um dado passo depende apenas do

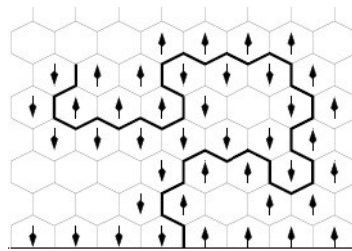


Figura 4.3: Exploração da rede

valor esperado do spin em frente dada a configuração dos spins já determinados, ou seja, está completamente determinada pelo domínio e pela própria curva traçada até então. Isso implica a versão discreta de uma propriedade fundamental da SLE:

Propriedade Markoviana (discreta): Seja γ_1 uma parte do caminho total (traçado em um domínio \mathcal{D}) coberta após um certo número de passos. A distribuição da probabilidade condicional para o restante da curva, dado γ_1 , é a mesma que a distribuição de probabilidade incondicional para a curva do domínio $\mathcal{D} \setminus \gamma_1$ iniciando na ponta de γ_1 .

A notação $A \setminus B$ representa $A - B$, *i.e.*, o conjunto A exceto sua interseção com B .

4.2 Evolução de Loewner

No limite contínuo a noção de densidade de probabilidade é substituída pelo conceito mais geral de medida. Uma curva γ ligando os pontos r_1 e r_2 da fronteira de um domínio \mathcal{D} possui medida representada por $\mu(\gamma; \mathcal{D}, r_1, r_2)$. Estaremos interessados em curvas que obedecem às seguintes propriedades no limite contínuo:

Propriedade Markoviana: Dividindo γ em duas partes, γ_1 de r_1 a τ e γ_2 de τ a r_2 , a medida condicional $\mu(\gamma_2 | \gamma_1; \mathcal{D}, r_1, r_2)$ é igual a $\mu(\gamma_2; \mathcal{D} \setminus \gamma_1, \tau, r_2)$.

Invariância Conforme: Seja Φ um mapeamento conforme do domínio \mathcal{D} em um domínio \mathcal{D}' que leva os pontos r_1 e r_2 em r'_1 e r'_2 . A medida μ das curvas em \mathcal{D} induz uma medida $(\Phi * \mu)$ nas curvas imagem em \mathcal{D}' , e essa deve ser igual à medida obtida no limite contínuo de curvas em \mathcal{D}' ligando r'_1 e r'_2 . Resumindo:

$$(\Phi * \mu)(\gamma; \mathcal{D}, r_1, r_2) = \mu(\Phi(\gamma); \mathcal{D}', r'_1, r'_2). \quad (4.1)$$

A primeira propriedade é apenas uma versão contínua da apresentada no fim da seção anterior. A segunda responde a uma das perguntas colocadas por Cardy, esclarecendo o que se quer dizer com invariância conforme. Embora o rigor matemático só seja atingido se forem provadas para o determinado modelo, apenas postularemos tais propriedades. Esperamos que a primeira valha pelo menos para modelos do tipo $O(n)$ (Ising generalizado em que um spin é um vetor de n componentes) com $n > 0$ mesmo fora do ponto crítico,

enquanto a segunda, em resultado da discussão já feita nos capítulos anteriores, deve valer somente na criticalidade.

O teorema do mapeamento de Riemann também será fundamental para a discussão a seguir. Ele garante que para quaisquer dois domínios simplesmente conexos no plano \mathcal{D} e \mathcal{D}' há sempre uma função analítica que mapeia o interior de \mathcal{D} no interior de \mathcal{D}' . Esse mapeamento não é único, uma vez que pode ser composto com um mapeamento de \mathcal{D}' em si mesmo, e para especificá-lo unicamente devemos fixar três parâmetros reais. Uma discussão mais completa do teorema, incluindo sua prova, encontra-se em [33]

A propriedade de invariância conforme de γ junto com o teorema de Riemann nos permite tratar de curvas contidas apenas no semiplano superior ($\{z : \text{Im } z > 0\}$ denotado por \mathbb{H}) e que iniciam na reta real, o que estará implícito a partir de agora. É fácil ver que, na rede, γ não toca em si mesma e nem no eixo real, mas no limite contínuo isso pode ocorrer (embora sempre haja uma reflexão), de modo que algumas regiões ficam envolvidas e se tornam inatingíveis. A união dos pontos dessas regiões com a própria curva crescida até o tempo t é denominada *hull*¹, e representada por K_t (veja a figura 4.4). No semiplano superior, K_t é uma união de conjuntos conectados ao eixo real. Em vez de tentar descrever o crescimento de γ , o matemático Charles Loewner teve a idéia de analisar como se modificam os mapeamentos conformes que anulam K_t , ou seja, os mapeamentos g_t que levam $\mathbb{H} \setminus K_t$ em \mathbb{H} mostrados na figura 4.5, de [30]. A vantagem é que para z fora da fronteira $g_t(z)$ muda mais suavemente. O teorema do mapeamento de Riemann garante a existência de g_t pois $\mathbb{H} \setminus K_t$ é simplesmente conexo, e a unicidade fica estabelecida ao fixarmos que assintoticamente o comportamento é predominantemente linear com termo

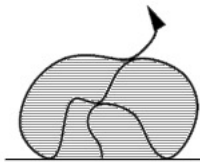


Figura 4.4: O *hull*

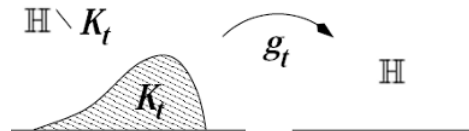


Figura 4.5: Mapa de $\mathbb{H} \setminus K_t$ em \mathbb{H}

¹O termo *hull* na matemática é usualmente traduzido como “fecho”, mas como não há tradução consagrada no contexto das evoluções de Loewner, manteremos a expressão inglesa.

de ordem z^0 nulo, *i.e.*, a série de Laurent é tal que:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g_t(z) = z + \mathcal{O}(1/z). \quad (4.2)$$

É possível mostrar que com o crescimento da curva o coeficiente de $1/z$, chamado capacidade C_t , é monotonicamente crescente [29]. Como ainda não definimos o significado exato do tempo t podemos reparametrizá-lo de forma que $t \equiv C_t/2$ (o fator dois é convencional), definindo o chamado tempo de Loewner. Uma propriedade interessante da capacidade (e portanto do tempo de Loewner) é a aditividade. Usando a expansão no limite assintótico vemos que

$$g_{t_2}(g_{t_1}(z)) \sim g_{t_1}(z) + \frac{2t_2}{g_{t_1}(z)} \sim z + \frac{2t_1 + 2t_2}{z}. \quad (4.3)$$

Intuitivamente, a ação de g_t pode ser vista como se o conjunto $K_t \setminus \mathbb{H}$ fosse deformado de modo a “esmagar” K_t . Com isso, a fronteira é mapeada no eixo real enquanto os pontos do eixo real fora de K_t lá permanecem, embora deslocados. Em particular, a ponta τ_t da trajetória é mapeada em um ponto real a_t que se move no eixo a medida que a curva cresce. Como o crescimento sempre se dá pela ponta, a função a_t deve ser contínua (mas não necessariamente diferenciável). O exemplo mais comumente discutido é uma linha que cresce verticalmente, para a qual, em um dado t , o *hull* K_t é o intervalo $(0, i\ell)$ no eixo imaginário. É fácil ver que a transformação conforme que o anula é

$$g_t(z) = (z^2 + \ell^2)^{1/2}. \quad (4.4)$$

A visualização é simples (veja figura 4.6): é como se fizéssemos um corte no eixo imaginário até $i\ell$ e deformássemos o semiplano até que a ponta seja trazida à origem. Os pontos imediatamente à esquerda da linha passam a ocupar o intervalo $(-\ell, 0)$ do eixo real, enquanto os à direita são levados no intervalo $(0, \ell)$. Para que haja crescimento basta

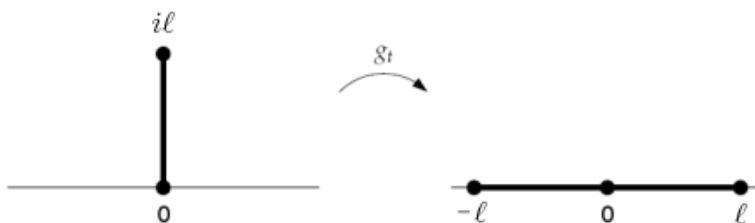


Figura 4.6: Linha vertical

trocar ℓ pelo tempo com a parametrização desejada, e para obedecer $C_t \equiv 2t$ usaremos $\ell^2 = 4t$, ou seja, a ponta do trajeto fica em $\tau_t = i2\sqrt{t}$. Podemos ainda generalizar um pouco mais a situação pensando em uma linha que cresce a partir de um ponto a do eixo real, de modo que

$$g_t(z) = a + [(z - a)^2 + 4t]^{1/2}. \quad (4.5)$$

Para outros problemas com solução exata veja [34].

Além de ilustrativo, esse exemplo é muito útil pois nos leva a um entendimento simples da equação de Loewner. Suponhamos uma curva qualquer evoluída até o tempo t e em seguida por um pequeno intervalo δt . A função g_t anula o conjunto K_t e portanto a imagem de $K_{t+\delta t}$ sob g_t deve ser uma pequena linha vertical acima do ponto a_t (a imagem da ponta da curva em t)². Para anular essa linha recorreremos então a (4.5). Assim, a função que anula $K_{t+\delta t}$ é a composição de (4.5) com g_t , *i.e.*,

$$g_{t+\delta t} = a_t + [(g_t(z) - a_t)^2 + 4\delta t]^{1/2}. \quad (4.6)$$

Fazendo-se $(g_{t+\delta t} - g_t)/\delta t$ no limite $\delta t \rightarrow 0$ temos a chamada Evolução de Loewner:

$$\boxed{\frac{dg_t(z)}{dt} = \frac{2}{g_t(z) - a_t}}. \quad (4.7)$$

Essa equação apareceu pela primeira vez em um trabalho de 1923 [35] que elucida aspectos da conjectura de Bieberbach, segundo a qual para uma função holomórfica, com expansão dada por $f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$, vale $|a_n| \leq n$. A prova definitiva veio somente em 1984 com Louis de Branges, utilizando idéias fortemente baseadas nos métodos de Loewner.

O que (4.7) nos diz é que, dado um caminho, determinamos o *hull* K_t , procuramos a função $g_t(z)$ e podemos encontrar a_t através dela. Em princípio também podemos pensar no problema oposto, em que dada uma função contínua a_t integramos (4.7) para encontrar g_t , e então $g_t^{-1}(a_t)$ traça a curva, no entanto a prova de que isso funciona não é trivial. Uma condição suficiente para a_t é que tenha expoente de Hölder $\sigma > 1/2$, onde σ é tal que $|a_{t_1} - a_{t_2}| \propto |t_1 - t_2|^\sigma$ [30].

²Para visualizar isso é útil pensar no limite contínuo da rede mostrada na figura 4.3

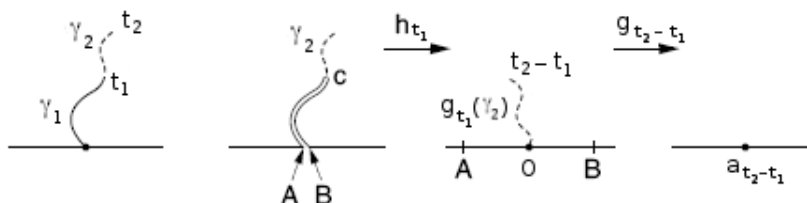


Figura 4.7: A série de mapeamentos

4.3 Evolução de Schramm-Loewner Estocástica

Mais de setenta anos depois, o israelense Oded Schramm recuperou as idéias de Loewner para descrever curvas aleatórias cujo limite contínuo acreditamos ser invariante conforme, como as paredes de domínio de modelos estatísticos. Ele percebeu que as propriedades markoviana e de invariância conforme aliadas à simetria de reflexão no eixo imaginário ($x \rightarrow -x$) são suficientes para fixar a medida sobre a variável a_t , e mais importante, mostrou que essa medida é a de um movimento browniano em uma dimensão. Para entender isso basta olharmos para as conseqüências das propriedades mencionadas sobre a função a_t em um procedimento semelhante ao que fizemos na dedução da equação de Loewner.

Evoluímos γ até um tempo t_2 chamando o pedaço crescido até o tempo $t_1 < t_2$ de γ_1 , enquanto o restante $\gamma \setminus \gamma_1$ é denominado γ_2 . A propriedade markoviana nos diz que a medida de γ_2 em \mathbb{H} dada γ_1 é a mesma que a de γ_2 no domínio $\mathbb{H} \setminus \gamma_1$. Aplicando o mapeamento g_{t_1} anulamos γ_1 e γ_2 passa a ser uma curva crescendo a partir de a_{t_1} . A invariância conforme garante que a medida de $g_{t_1}(\gamma_2)$ permanece inalterada, apenas deslocada por a_{t_1} . Podemos ainda pensar no mapeamento $h_{t_1} = g_{t_1} - a_{t_1}$ que transforma γ_2 em uma curva que cresce a partir da origem. Uma vez que h_{t_1} também é conforme, a medida é invariante. Para então anular $g_{t_1}(\gamma_2)$ usamos a função $g_{t_2-t_1}$, dando como imagem da ponta $a_{t_2-t_1}$. Todos esses passos estão representados na figura 4.7, adaptada de [32]. Vemos assim que a medida sobre $a_{t_2-t_1}$ é a mesma que a sobre $a_{t_2} - a_{t_1}$. Essa é a propriedade de estacionariedade, característica de um movimento browniano. Como já discutimos, após a aplicação de g_{t_1} a curva γ_1 é mapeada no eixo real, e conseqüentemente passa a fazer parte do contorno. Isso mostra a propriedade de independência, *i.e.*, que a medida de γ_2 é independente da medida de γ_1 . Estacionariedade e independência são as propriedades definitivas de um movimento browniano [32]. Em outras palavras, todos

os incrementos $\Delta_n = a_{t_n+\delta t} - a_{t_n}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, formando um movimento browniano no eixo real, e portanto podemos escrever

$$a_t = \sqrt{\kappa} B_t, \quad (4.8)$$

onde κ é uma constante e

$$\langle B_t \rangle = 0 \quad \langle (B_{t_2} - B_{t_1})^2 \rangle = |t_2 - t_1|. \quad (4.9)$$

Em princípio poderíamos ter também um termo de arrasto do tipo αt , mas ele é descartado para curvas cuja medida apresenta simetria de reflexão $x \rightarrow -x$, o que é o caso em que estamos interessados. A constante κ , que de certa maneira mede a intensidade de difusão, é um parâmetro essencial que determinará o comportamento das curvas geradas, estando cada valor associado a um modelo diferente. A comparação com a carga central de uma teoria conforme é inevitável, e como veremos, procedente.

4.4 Fases da SLE

Uma questão natural é saber como é esse comportamento das curvas para diferentes valores de κ , ao menos qualitativamente. Para $\kappa = 0$ temos a linha vertical de (4.5) com $a = 0$, mas a medida que ele aumenta a curva vira mais freqüentemente à esquerda ou à direita. Esperamos que para valores maiores de κ a curva deixe de ser um traço simples e comece encostar em si mesma ou no eixo real, agregando ao *hull* pontos externos a ela. Esse comportamento é claramente observado, e ocorre que os valores $\kappa = 4$ e $\kappa = 8$ separam fases qualitativamente diferentes. A prova rigorosa [36] está além dos nossos objetivos, mas o argumento pode ser simplificado e ainda ser capaz de prever o valor crítico $\kappa = 4$. Primeiro escrevemos a equação estocástica obedecida pelo mapeamento $h_t(z) \equiv g_t(z) - a_t$, que leva a ponta da curva na origem:

$$dh_t(z) = \frac{2dt}{h_t(z)} - da_t. \quad (4.10)$$

Não podemos escrever uma equação diferencial ordinária pois a_t não é necessariamente diferenciável. Olhamos então o que acontece com um ponto x_0 do eixo real, que é mapeado em $x_t = h_t(x_0)$ onde

$$dx_t = \frac{2dt}{x_t} - \sqrt{\kappa} dB_t. \quad (4.11)$$

Esta é uma equação de Langevin conhecida como processo de Bessel, que descreve a distância à origem R_t de um movimento browniano em d dimensões se fizermos as substituições $R_t = (d - 1)^{1/2}x_t/2$ e $\kappa^2 = 4/(d - 1)$. Ao mesmo tempo em que é repelido da origem, o ponto x_t está sujeito a uma força de carácter aleatório, cuja intensidade está ligada ao parâmetro κ , e informações sobre o comportamento esperado podem ser tiradas dos casos limites. Se ignorarmos completamente a força aleatória temos $dx_t = 2/x_t$ e portanto $x_t^2 = 4t$, ao passo que se ignorarmos o termo repulsivo temos $\langle x_t^2 \rangle \sim \kappa \langle B_t^2 \rangle = \kappa t$. Assim, se $\kappa < 4$ a força repulsiva deve prevalecer e o ponto escapa para o infinito, enquanto que se $\kappa > 4$ o ruído aleatório prevalece e o ponto x_t acaba eventualmente chegando à origem, o que invalida (4.11). A aproximação de x_t da origem representa um toque da curva no eixo real sobre o ponto x_0 , pois quando a ponta τ_t se aproxima de x_0 , $g_t(\tau_t)$ se aproxima de a_t e, por conseguinte, $x_t \rightarrow h_t(\tau_t) \rightarrow 0$.

Concluimos que para $\kappa < 4$ a curva não deve tocar a si mesma e nem o eixo real, sendo um traço simples que liga a origem ao infinito (o argumento rigoroso mostra que $\kappa = 4$ também entra nesse caso). Por outro lado, se $\kappa > 4$ a curva envolve regiões que se tornam inatingíveis e aderem ao *hull* (que eventualmente cobrirá todo o plano superior). Embora ainda não possamos detectar, valores muito altos de κ tornam desprezíveis a força de repulsão à origem fazendo com que a curva visite todos os pontos de \mathbb{H} . A diferença nesse caso é que não há regiões envolvidas que se tornam inatingíveis; todos os pontos do *hull* pertencem à curva, que cobre todo o semiplano superior. Verificaremos adiante que isso ocorre para $\kappa > 8$. A figura a seguir, de [37], ilustra as fases da SLE.

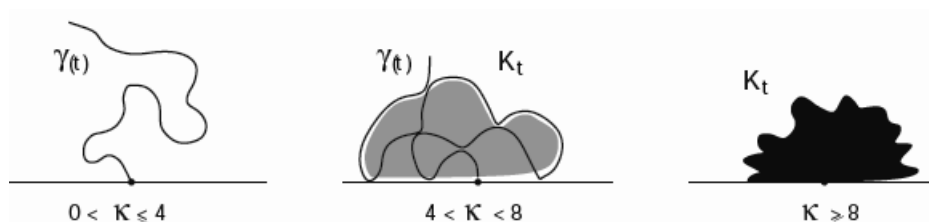


Figura 4.8: As fases da SLE

4.5 Dimensão Fractal

Nessa seção faremos um cálculo típico de SLE, obtendo um resultado para o qual os métodos usuais de teorias conformes não são adequados [29]. As curvas originadas por uma SLE, como as paredes de domínios de uma teoria conforme, apresentam comportamento fractal e uma pergunta relevante é: qual a dimensão fractal dessas curvas? A definição de dimensão fractal mais comum entre os físicos provém da idéia de cobrir a curva com discos de raio ϵ e verificar como o número mínimo de discos $N(\epsilon)$ escala com ϵ no limite $\epsilon \rightarrow 0$. Se $N(\epsilon) \propto \epsilon^{-d_f}$, então d_f é dita a dimensão fractal. Para curvas aleatórias como uma SLE essa definição pode ser reformulada considerando-se a probabilidade $P(z, \epsilon)$ da curva cruzar um disco de raio ϵ centrado em um ponto z do plano. O número de discos cobrindo uma área A é $N_A \propto A/\epsilon^2$ e a probabilidade de que a curva cruze um dado disco é essencialmente $P \propto N(\epsilon)/N_A$, de modo que

$$P(z, \epsilon) \propto \epsilon^{2-d_f}. \quad (4.12)$$

Iniciamos o cálculo de $P(z, \epsilon)$ submetendo uma curva já evoluída ao mapeamento h_{dt} definido na seção anterior e que obedece a (4.10), ou seja, uma transformação que anula um pequeno trecho inicial da curva e resulta em uma nova que também parte da origem. De (4.10) vemos que os pontos $z = x + iy$ são levados nos pontos $g_{dt}(z) \equiv w = x' + iy'$ tal que

$$w = \frac{2dt}{z} - \sqrt{\kappa} dB_t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = x + 2xdt/(x^2 + y^2) - \sqrt{\kappa} dB_t \\ y' = y - 2ydt/(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (4.13)$$

O raio do disco centrado em z é definido por $|z - z'|$ para um z' na borda do disco, e após a transformação muda como $\epsilon \rightarrow \epsilon'$ onde

$$\epsilon' = |h_{dt}(z) - h_{dt}(z')| = |h_{dt}(z) - [h_{dt}(z) + h'_{dt}(z)(z - z')]| = \epsilon |h'_{dt}|. \quad (4.14)$$

Lembrando que $h_0(z) = z$ e $a_0 = 0$, podemos usar (4.10) em $dh = h_{dt} - h_0$, obtendo

$$\frac{2dt}{h_0} = h_{dt} - h_0 \quad \Rightarrow \quad h_{dt} = z + \frac{2dt}{z}. \quad (4.15)$$

Agora podemos calcular $|h'_{dt}|$:

$$|h'_{dt}| = \left| 1 - \frac{2dt}{z^2} \right| \approx 1 - 2dt \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (4.16)$$

e finalmente $\epsilon' = \epsilon [1 - 2dt(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2]$

Por invariância conforme, a medida sobre a imagem é a mesma que sobre a curva original, e por isso podemos escrever

$$P(x, y, \epsilon) = \left\langle P \left(x + \frac{2xdt}{x^2 + y^2} - \sqrt{\kappa} dB_t, y - \frac{2ydt}{x^2 + y^2}, \epsilon \left[1 - \frac{2dt(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right] \right) \right\rangle, \quad (4.17)$$

onde a média é tomada sobre as possíveis configurações da curva que foi anulada por h_{dt} . O próximo passo é expandir o lado direito da expressão acima até primeira ordem em dt , lembrando que $\langle dB_t \rangle = 0$ e $\langle (dB_t)^2 \rangle = dt$ (logo será necessário ir até segunda ordem em dB_t). Fazendo isso construímos uma equação diferencial parcial para P :

$$\left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\kappa}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \epsilon \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) P = 0. \quad (4.18)$$

É interessante notar que sendo $P \propto \epsilon^{2-d_f}$ então $\epsilon \partial P / \partial \epsilon = (2 - d_f)P$ e o cálculo se torna uma equação de autovalores, o que é bastante comum nos métodos de SLE. Porém nesse caso em especial o *ansatz* $P = \epsilon^{2-d_f} y^\alpha (x^2 + y^2)^\beta$, com $\alpha + 2\beta = d_f - 2$, resolve a equação e substituindo em (4.18) podemos tirar os parâmetros α, β e ϵ .

Se $\kappa \leq 8$ obtemos $\alpha = (\kappa - 8)^2 / 8\kappa$, $\beta = (\kappa - 8) / 2\kappa$, e o que buscamos,

$$\boxed{d_f = 1 + \frac{\kappa}{8}}. \quad (4.19)$$

Se $\kappa > 8$ há a solução $\alpha = \beta = 0$ e $d_f = 2$. Vemos que a dimensão fractal aumenta de 1 até 2 quando κ vai de 0 a 8, e a partir daí a curva tem dimensão 2, cobrindo todo o espaço: todos os pontos de \mathbb{H} pertencem à curva, confirmando o que havíamos antecipado na seção anterior.

Esse cálculo é um belo exemplo de como podemos usar a SLE para obter propriedades geométricas não-triviais e em princípio intratáveis a partir dos métodos clássicos de física estatística. Trata-se de uma fórmula simples porém notável que engloba diversos resultados em um só.

4.6 SLE e Teorias Conformes

Em virtude da clara mudança de comportamento para os diferentes κ já poderíamos imaginar que cada valor corresponde ao limite contínuo de um modelo diferente, como

o processo de exploração descrito na seção 4.1 que constrói uma parede de domínio de um modelo (Ising, $O(n)$, q -Potts...), ou mesmo curvas aleatórias como *self-avoiding walks*, varredura uniforme de árvores e problemas de percolação. Cálculos tais como a dimensão fractal sacramentam essa idéia uma vez que cada uma dessas curvas possui uma dimensão diferente, e com base nisso podemos começar a associar uma SLE_κ a um dado modelo. Da forma que definimos, a dimensão fractal do modelo de Ising por exemplo é conhecida como sendo $d_f = 11/8$ [38], e substituindo em (4.19) isso nos dá $\kappa = 3$. Realizando esse tipo de comparação, bem como comparações com outros cálculos típicos de SLE (alguns serão mencionados adiante) é possível conjecturar as seguintes associações:

- $\kappa = 8/3$ \longleftrightarrow *Self-avoiding walks*
- $\kappa = 2$ \longleftrightarrow *Loop-erased random walks*
- $\kappa = 3$ \longleftrightarrow Modelo de Ising crítico
- $\kappa = 4$ \longleftrightarrow Explorador harmônico e Potts com 4 estados
- $\kappa = 6$ \longleftrightarrow Fronteiras de *clusters* de percolação
- $\kappa = 8$ \longleftrightarrow Varredura uniforme de árvores

As relações envolvendo *loop erased random walks* e varredura uniforme de árvores já foram provadas em [39], a que envolve o explorador harmônico foi provada em [40] e a sobre os *clusters* de percolação em [41]. Em 2006 S. Smirnov apresentou a prova de que o modelo de Ising, o primeiro dos modelos mínimos conformes, corresponde de fato a uma SLE_3 [42] partindo de uma rede triangular.

Essas correspondências sugerem que o parâmetro κ tem um papel semelhante ao da carga central de uma teoria conforme, determinando o modelo descrito. Os franceses Michel Bauer e Denis Bernard iniciaram a tentativa de relacionar diretamente os parâmetros, e conseguiram conjecturar uma fórmula [37, 43] válida para $c < 1$. Com intuito de entendê-la seguiremos a discussão contida em [29].

Ao começar a tratar problemas relacionados a uma SLE no formalismo da teoria de campos conforme, precisamos definir um domínio com fronteiras de modo a garantir a existência de uma parede de domínio ligando a origem ao infinito, isto é, uma versão contínua da idéia exposta na figura 4.3, onde todos os spins à esquerda da origem estão para baixo enquanto os à direita estão para cima. As técnicas apropriadas para isso foram desenvolvidas na chamada teoria conforme de fronteira [44], em que são estudados

os comportamentos dos observáveis de uma teoria conforme definida em um domínio com uma condição de contorno. Suponhamos um conjunto de campos $\{\psi(r)\}$ dados no semiplano superior cujas integrais de trajetória sejam definidas com uma medida de Gibbs $e^{-S[\psi]}[d\psi]$, e seja Γ um semicírculo no semiplano superior, centrado na origem. No âmbito da quantização radial um estado é definido sobre um semicírculo e a evolução temporal se dá a medida que o raio aumenta (pois a dimensão temporal é a radial), *i.e.*, a curva Γ está sobre um tempo atual T . Dessa maneira, o vácuo da teoria é obtido pesando-se cada estado $|\psi'_\Gamma\rangle$ pela integral de trajetória restrita ao interior de Γ que obedece à condição de contorno $\psi = \psi'_\Gamma$:

$$|0\rangle = \int [d\psi'_\Gamma] \int_{\psi_\Gamma=\psi'_\Gamma} [d\psi] e^{-S[\psi]} |\psi'_\Gamma\rangle . \quad (4.20)$$

Isso pode ser entendido tomando-se o produto escalar dessa expressão com um estado qualquer $\langle\psi''_\Gamma|$ definido sobre Γ . Chamando o lado direito de (4.20) de $|\phi\rangle$ temos

$$\langle\psi''_\Gamma|\phi\rangle = \int_{\psi=\psi''_\Gamma} [d\psi] e^{-S(\psi)} , \quad (4.21)$$

onde a integral agora é sujeita à condição de contorno $\psi = \psi''_\Gamma$ sobre a fronteira de Γ . A interpretação dessa expressão é simples: estamos somando todas as trajetórias possíveis que iniciam no vácuo em $t \rightarrow -\infty$ (centro de Γ) e são evoluídas até o estado ψ''_Γ no tempo atual T . Em outras palavras, esta é a amplitude de probabilidade de termos o vácuo como estado de entrada e $|\psi''_\Gamma\rangle$ no tempo atual como estado de saída:

$$\langle\psi''_\Gamma|\phi\rangle = \langle\psi''_\Gamma|0\rangle . \quad (4.22)$$

Sendo ψ''_Γ um estado qualquer, podemos escrever $|\phi\rangle = |0\rangle$. Vale notar que por invariância de escala (4.20) não depende do raio de Γ , a menos de fatores de normalização.

Nem todos os estados, porém, possibilitam a existência de uma curva γ_t no interior de Γ . Definimos um estado que contém uma curva γ_t condicionando a integral de trajetória às configurações do campo ψ que possibilitam isso:

$$|\gamma_t\rangle = \int [d\psi'_\Gamma] \int_{\psi_\Gamma=\psi'_\Gamma; \gamma_t} [d\psi] e^{-S[\psi]} |\psi'_\Gamma\rangle . \quad (4.23)$$

A integral de trajetória em todo o semiplano superior condicionada à existência de γ_t é uma medida desses estados e portanto funciona como uma medida $d\mu(\gamma_t)$ sobre as curvas. O estado equivalente a uma média dos $|\gamma_t\rangle$, definido por

$$|h_t\rangle \equiv \int d\mu(\gamma_t) |\gamma_t\rangle , \quad (4.24)$$

é na verdade independente de t , ou melhor, $|h_t\rangle = |h\rangle$. A razão é que podemos realizar o mapeamento de Loewner $h_t(z) \equiv g_t(z) - a_t$ que anula γ_t levando sua ponta à origem e ainda deixa a medida invariante, de modo que em qualquer tempo t a integral pode ser feita sobre a condição de contorno em $t = 0$. Sob h_t , a curva é sempre levada na condição inicial correspondente à situação na qual os pontos à esquerda da origem têm ‘spin’ negativo e os à direita positivo (veja figura 4.9), situação análoga à ação do mapeamento (4.5). Por isso, o estado $|h\rangle$ representa na teoria conforme de fronteira o que se chama de operador de mudança de condição de contorno colocado na origem.

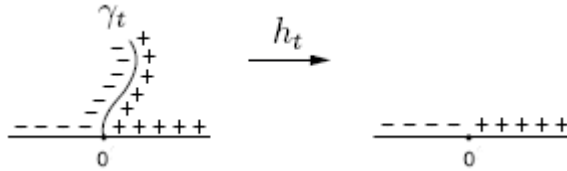


Figura 4.9: O mapeamento h_t

A ponte com as técnicas do capítulo 2 é feita pensando-se em uma seqüência de mapeamentos conformes infinitesimais dh_t satisfazendo $dh_t = 2dt/h_t - da_t$ como em (4.10), mas agora do ponto de vista da identidade de Ward conforme (2.52). Nela, o lado esquerdo contém a variação do campo e o lado direito pode ser integrado por partes dando (2.53), cujo primeiro termo é nulo graças a (2.54). A transformação infinitesimal $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon(\mathbf{x})$ é dada por $z' = z + dh_t$ de forma que a variação no campo traduz-se na inserção de

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{2dt}{z} - da_t \right) T(z) dz \quad (4.25)$$

na função de correlação. Operatorialmente, de (2.81) vemos que isso é expresso por uma variação de $2L_{-2}dt - L_{-1}da_t$ do estado original. A seqüência de mapeamentos portanto equivale à aplicação de $(1 + 2L_{-2}dt - L_{-1}da_t)$ diversas vezes ao estado $|\gamma_t\rangle$, o que em um tempo finito dá uma exponencial ordenada temporalmente (pois cada aplicação ocorre em um tempo diferente). Assim, para um tempo $t_1 < t$ parte da curva é anulada e o que sobra forma o estado dado por

$$|g_{t_1}(\gamma_t)\rangle = \mathbf{T} \exp \left[\int_0^{t_1} (2L_{-2}dt' - L_{-1}da_{t'}) \right] |\gamma_t\rangle. \quad (4.26)$$

A medida sobre γ_t é o produto da medida de γ_{t_1} com a medida de $\gamma_t \setminus \gamma_{t_1}$ condicionada a γ_{t_1} . A primeira é a medida sobre $a_{t'}$ para t' entre 0 e t_1 e a segunda, por invariância

conforme, é igual à medida de $g_{t_1}(\gamma_t)$ sem qualquer condição. Invertendo (4.26) podemos então reescrever (4.24) a partir disso:

$$|h_t\rangle = \int d\mu(g_{t_1}(\gamma_t)) \int d\mu(a_{t'; 0 \leq t' \leq t_1}) \mathbf{T} \exp \left[- \int_0^{t_1} (2L_{-2} dt' - L_{-1} da_{t'}) \right] |g_{t_1}(\gamma_t)\rangle. \quad (4.27)$$

A integral é realizada quebrando-se o intervalo $[0, t_1]$ em pedaços de tamanho δt e expandindo as exponenciais até primeira ordem em δt :

$$\begin{aligned} \int d\mu(a_{t'}) \mathbf{T} \exp \left[- \int_0^{t_1} (2L_{-2} dt' - L_{-1} da_{t'}) \right] &= \int d\mu(a_{t'}) \prod_i \exp \left[- \int_{t_i}^{t_{i+1}} (2L_{-2} dt' - L_{-1} da_{t'}) \right] \\ &= \int d\mu(a_{t'}) \prod \left[1 - 2L_{-2} \delta t + L_{-1} a_{\delta t} + \frac{1}{2} (L_{-1} a_{\delta t})^2 \right]. \end{aligned}$$

As integrais sobre $a_{\delta t}$ e $a_{\delta t}^2$ são simples médias, conhecidas de (4.8) e (4.9): $\langle a_{\delta t} \rangle = 0$ e $\langle a_{\delta t}^2 \rangle = \kappa \delta t$. Dessa forma

$$\begin{aligned} \int d\mu(a_{t'}) \mathbf{T} \exp \left[- \int_0^{t_1} (2L_{-2} dt' - L_{-1} da_{t'}) \right] &= \prod_i \left[1 - (2L_{-2} - \frac{\kappa}{2} L_{-1}^2) \delta t \right] \\ &= \exp \left[-(2L_{-2} - \frac{\kappa}{2} L_{-1}^2) t_1 \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Como a parte de (4.27) referente a γ_1 foi integrada, pela propriedade markoviana o restante equivale a $|h_{t-t_1}\rangle$, i.e.,

$$|h_t\rangle = \exp \left[-(2L_{-2} - \frac{\kappa}{2} L_{-1}^2) t_1 \right] |h_{t-t_1}\rangle. \quad (4.29)$$

Entretanto já argumentamos que $|h_t\rangle$ não pode depender do tempo, o que nos dá a condição

$$(2L_{-2} - \frac{\kappa}{2} L_{-1}^2) |h\rangle = 0, \quad (4.30)$$

ou seja, o estado $|h\rangle$ possui um descendente nulo no segundo nível justamente como na equação (3.38) com $a = -\kappa/4$. De acordo com a discussão final da seção 3.5 as relações entre a , h e a carga central c são $a = -3/(4h + 2)$ e $c = -2h(6a + 4)$, o que nos dá $c = (3 + 2a)(3a + 2)/a$. Substituindo $a = -\kappa/4$ finalmente chegamos a

$$\boxed{c = \frac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa}}. \quad (4.31)$$

Embora ainda não haja uma prova considerada matematicamente rigorosa para essa fórmula, o resultado concorda com o que se conhece das teorias conformes e das relações

entre modelos estatísticos e SLE. Para $\kappa = 3$ por exemplo obtemos $c = 1/2$, *i.e.*, o modelo de Ising como já havíamos conjecturado. Os valores $\kappa = 6$ (percolação crítica) e $\kappa = 8/3$ (*self-avoiding walk*) dão $c = 0$. Isso acontece pois são respectivamente os limites formais $q \rightarrow 1$ do modelo de q -Potts e $n \rightarrow 0$ do modelo $O(n)$ [45], situações nas quais as funções de partição fatoram e se tornam triviais.

4.7 Comentários Finais

Com essa pequena exposição é possível ter uma idéia da aplicabilidade dos métodos de SLE além de ficar evidente a existência de uma relação com as teorias conformes. O cálculo da dimensão fractal é interessante por si mesmo mas vale ainda como ilustração para outros cálculos de SLE que são muito semelhantes e dão origem a equações diferenciais parecidas com (4.18). Um exemplo é a fórmula de Schramm, que determina a probabilidade de uma curva ligando dois pontos da fronteira passar à esquerda de um dado ponto ζ . A solução, embora não aparente com os métodos tradicionais, usando-se SLE é simples: consideramos uma curva que liga o ponto a_0 ao infinito (podemos fazer isso por invariância conforme) que é então submetida ao mapeamento g_{dt} . A nova curva possui a mesma medida porém iniciando de $a_{dt} = a_0 + \sqrt{\kappa}dB_t$, e o ponto ζ é deslocado para $\zeta' = g_{dt}(\zeta) = \zeta + 2dt/(\zeta - a_0)$. O mesmo procedimento de igualar as probabilidades que fizemos na determinação da dimensão fractal nos leva a

$$P(\zeta, \bar{\zeta}; a_0) = \langle P(\zeta + 2dt/(\zeta - a_0), \bar{\zeta} + 2dt/(\bar{\zeta} - a_0); a_0 + \sqrt{\kappa}dB_t) \rangle, \quad (4.32)$$

onde incluímos a dependência em $\bar{\zeta}$ pois P não é uma função holomórfica. Prosseguimos expandindo até primeira ordem em dt para obter a equação diferencial parcial obedecida:

$$\left(\frac{2}{\zeta - a_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{2}{\bar{\zeta} - a_0} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\kappa}{2} \frac{\partial^2}{\partial a_0^2} \right) P(\zeta, \bar{\zeta}; a_0). \quad (4.33)$$

Por invariância de escala P não pode depender da distância entre ζ e a_0 mas somente do ângulo entre eles, ou melhor, do ângulo θ entre $\zeta - a_0$ e o eixo real. Isso reduz (4.33) a uma equação diferencial ordinária hipergeométrica. A solução para $\kappa = 6$ (percolação), encontrada por Schramm [46], é

$$P = \frac{1}{2} - \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{6})} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; -\cot^4 \frac{\theta}{2} \right) \cot \frac{\theta}{2}, \quad (4.34)$$

onde ${}_2F_1(a, b; c; x)$ é a função hipergeométrica de Gauss³. Independente do resultado, vemos que o procedimento é bastante semelhante ao da dimensão fractal, e isso se aplica a outros exemplos como a já citada fórmula de Cardy, conjecturada por métodos de teoria conforme e provada por Smirnov em [41], e outros problemas de percolação parecidos, como a determinação da probabilidade de um dado ponto estar conectado por um *cluster* a um segmento da fronteira (para esses e outros exemplos veja [47]).

A relação com a teoria conforme é um ponto que ainda requer avanços. Bauer e Bernard já obtiveram vários resultados de SLE por teoria conforme em uma série de artigos [37, 43, 48, 49, 50, 51, 52], porém os detalhes da conexão entre os dois formalismos ainda não é totalmente claro. Um dos desafios é provar as propriedades markoviana e de invariância conforme no limite contínuo dos principais modelos, garantindo assim a aplicabilidade dos métodos de SLE. Resultados em modelos não tão simplificados quanto Ising também são desejáveis. Para q -Potts por exemplo há uma conjectura baseada nas dimensões fractais (calculadas em [53]) relacionando q e κ por $q = 2 + 2 \cos(8\pi/\kappa)$. Similarmente, para o modelo $O(n)$ conjectura-se $n = -2 \cos(4\pi/\kappa)$ [54]. Encontrar provas rigorosas para essas relações ainda é um problema em aberto para matemáticos e físicos-matemáticos.

Vimos que as propriedades markoviana e de invariância conforme implicam um comportamento browniano para a variável a_t , mas uma pergunta ainda a ser respondida é: quais seriam as propriedades de uma evolução de Loewner gerada por processos não brownianos? Em 2006, I. Rushkin *et al.* iniciaram essa discussão considerando evoluções de Loewner geradas por processos de Lévy [55]. O trabalho sugere a ocorrência de uma mudança de fase semelhante à descrita na seção 4.4 conforme o parâmetro da distribuição é variado e simulações numéricas são realizadas para ilustrar isso. A caracterização de outras propriedades dessas evoluções é um tema de pesquisa atual,

Outros temas atuais são as inusitadas conexões entre SLE e assuntos em princípio distantes. Nas referências [56, 57] D. Bernard *et al.* exploram as idéias de SLE em um problema fundamental da teoria da turbulência em duas dimensões: as estruturas de vorticidade em pequena escala, que são invariantes de escala, possuem a simetria ainda maior de invariância conforme? Características universais de um SLE_6 foram encontradas nas fronteiras de *clusters* de vórtices, indicando que a resposta pode ser positiva, o que é bastante intrigante uma vez que as correlações entre vórtices são de longo alcance. Outras

³Veja <http://mathworld.wolfram.com/HypergeometricFunction.html>

aplicações incluem ainda vidros de spin [58] e até mesmo gravidade quântica [59].

Para terminar, voltemos à física estatística. No argumento de Peierls surge uma associação natural entre a energia livre e as paredes de domínio de um modelo, e isso é rotineiramente explorado pelos físicos estatísticos. Contudo, no formalismo da SLE não há qualquer tipo de consideração energética. Em [32], H. Fogedby coloca como grandes questões a serem respondidas no contexto da interface entre SLE e física estatística a determinação de onde se encontra a energia livre além de como inserir e como usar considerações e estimativas físicas (de forma semelhante à feita por Peierls por exemplo).

Referências Bibliográficas

- [1] W. Pauli, “The connection between spin and statistics,” *Phys. Rev.*, vol. 58, pp. 716–722, 1940.
- [2] A. Polyakov, “Conformal symmetry of critical fluctuations,” *Sov. Phys. JETP Lett.*, vol. 12, p. 381, 1970.
- [3] A. Belavin, A. Polyakov, and A. Zamolodchikov, “Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory,” *Nucl. Phys. B*, vol. 241, pp. 333–380, 1984.
- [4] O. Schramm, “Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees,” *Israel J. Math.*, vol. 118, pp. 221–288, 2000. (math/9904022v2).
- [5] “Kitp program: Stochastic geometry and field theory: From growth phenomena to disordered systems.” <http://online.kitp.ucsb.edu/online/sle06/si-schedule.html>, 2006.
- [6] J. L. Cardy, *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*. Cambridge University Press, 1996.
- [7] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*. Springer-Verlag, 1997.
- [8] M. Henkel, *Conformal Invariance and Critical Phenomena*. Springer-Verlag, 1999.
- [9] H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. Oxford University Press, 1987.

- [10] L. Onsager, “Crystal statistics I. A two-dimensional model with an order-disorder transition,” *Phys. Rev.*, vol. 65, pp. 117–149, 1944.
- [11] L. P. Kadanoff, “Scaling laws for Ising models near T_c ,” *Physics* 2, pp. 263–272, 1966.
- [12] P. Ginsparg, “Applied conformal field theory,” in *Les Houches, Session XLIX, 1988. Champs, Cordes et Phénomènes Critiques*, Elsevier Science Publishers B.V., 1989.
- [13] C. Itzykson and J.-M. Drouffe, *Statistical Field Theory vols. 1, 2*. Cambridge University Press, 1989.
- [14] J. L. Cardy, “Conformal invariance and statistical mechanics,” in *Les Houches, Session XLIX, 1988. Champs, Cordes et Phénomènes Critiques*, Elsevier Science Publishers B.V., 1989.
- [15] H. B. G. Casimir, “On the attraction between two perfectly conducting plates,” *Proc. Kon. Nederland. Akad. Wetensch.*, vol. B51, p. 793, 1948.
- [16] H. W. J. Blöte, J. L. Cardy, and M. P. Nightingale, “Conformal invariance, the central charge, and universal finite-size amplitudes at criticality,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 56, no. 7, pp. 742–745, 1986.
- [17] J. F. Gomes, “The triviality of representations of the Virasoro algebra with vanishing central element and L_0 positive,” *Phys. Lett. B*, vol. 171, pp. 75–76, 1982.
- [18] H. G. Schaap, *Ising models and neural networks*. PhD thesis, University of Groningen, 2005.
- [19] A. Jiménez, K. F. Tiampo, and A. M. Posadas, “An Ising model for earthquake dynamics,” *Nonlin. Processes Geophys.*, vol. 14, pp. 5–15, 2007.
- [20] E. Ising, *Beitrag zur Theorie des Ferro- und Paramagnetismus*. PhD thesis, University of Hamburg, 1924.
- [21] R. E. Peierls, “On Ising’s model of ferromagnetism,” *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 32, pp. 477–481, 1936.
- [22] B. Kaufman, “Crystal statistics II. Partition function evaluated by spinor analysis,” *Phys. Rev.*, vol. 76, p. 1232, 1949.

- [23] T. D. Schultz, D. C. Mattis, and E. H. Lieb, “Two-dimensional Ising model as a soluble problem of many fermions,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 36, p. 856, 1964.
- [24] J. B. Kogut, “An introduction to lattice gauge theory and spin systems,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 51, no. 4, pp. 659–713, 1979.
- [25] D. Boyanovsky, “Field theory of the two-dimensional Ising model: Conformal invariance, order and disorder, and bosonisation,” *Phys. Rev. B*, vol. 39, no. 10, pp. 6744–6756, 1989.
- [26] V. G. Kac, *Contravariant form for infinite dimensional Lie algebras and superalgebras*. Lectures Notes in Physics vol. 94, Springer-Verlag, 1979.
- [27] D. Friedan, Z. Qiu, and S. Shenker, “Conformal invariance, unitarity and critical exponents in two dimensions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 52, p. 1575, 1984.
- [28] J. L. Cardy, “Critical percolation in finite geometries,” *J. Phys. A*, vol. 25, p. L201, 1992. (hep-th/9111026).
- [29] J. L. Cardy, “SLE for theoretical physicists,” *Ann. Physics*, vol. 318, pp. 81–118, 2005. (cond-mat/0503313).
- [30] J. L. Cardy, “Lectures on Stochastic Loewner Evolution and other growth processes in two dimensions.” <http://www-thphys.physics.ox.ac.uk/user/JohnCardy/newton.pdf>, 2006.
- [31] I. A. Gruzberg and L. P. Kadanoff, “The Loewner equation: maps and shapes,” *J. Stat. Phys.*, vol. 114, p. 1883, 2004. (cond-mat/0309292).
- [32] H. C. Fogedby, “Stochastic Loewner Evolution. Linking universality, criticality and conformal invariance in complex systems,” 2007. (arXiv: 07061177).
- [33] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis 3rd edition*. McGraw-Hill New York, 1979.
- [34] W. Kager, B. Nienhuis, and L. P. Kadanoff, “Exact solutions for Loewner evolutions,” *J. Stat. Phys.*, vol. 115, pp. 805–822, 2004. (math-ph/0309006).
- [35] K. Löwner, “Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises,” *I. Math. Ann.*, vol. 89, p. 103, 1923.

- [36] S. Rhode and O. Schramm, “Basic properties of SLE,” *Ann. Math.*, vol. 161, pp. 879–920, 2005. (math/0106036).
- [37] M. Bauer and D. Bernard, “Conformal field theories of stochastic Loewner evolutions,” *Comm. Math. Phys.*, vol. 239, pp. 493–521, 2003. (hep-th/0210015).
- [38] C. Vanderzande and A. L. Stella, “Bulk, surface and hull fractal dimension of critical ising clusters in $d=2$,” *J. Phys. A*, vol. 22, pp. L445–L451, 1989.
- [39] G. F. Lawler, O. Schramm, and W. Werner, “Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees,” *Ann. Probab.*, vol. 32, p. 939, 2004. (math.PR/0112234).
- [40] O. Schramm and S. Sheffield, “The harmonic explorer and its convergence to SLE_4 ,” *Ann. Probab.*, vol. 6, pp. 2127–2148, 2005. (math.PR/0310210).
- [41] S. Smirnov, “Critical percolation in the plane: conformal invariance, Cardy’s formula, scaling limits,” *R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, vol. 333(3), p. 239, 2001.
- [42] S. Smirnov, “Towards conformal invariance of 2D lattice models,” in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, vol. 2, pp. 1421–1451, European Mathematical Society, 2006.
- [43] M. Bauer and D. Bernard, “SLE growth processes and conformal field theories,” *Phys. Lett. B*, vol. 543, pp. 135–138, 2002. (math-ph/0206028).
- [44] J. L. Cardy, “Boundary conformal field theory,” in *Encyclopedia of Theoretical Physics*, Elsevier, 2005. (hep-th/0411189).
- [45] P. G. de Gennes, *Scaling Concepts in Polymer Physics*. Cornell University Press, 1979.
- [46] O. Schramm, “A percolation formula,” *Electronic Comm. Probab.*, vol. 8, no. 12, 2001. (math.PR/0107096).
- [47] W. Kager and B. Nienhuis, “A guide to stochastic Löwner evolution and its applications,” *J. Stat. Phys.*, vol. 115, pp. 1149–1229, 2004.

- [48] M. Bauer and D. Bernard, “2D growth processes: SLE and Loewner chains,” *Phys. Rep.*, vol. 432, pp. 115–221, 2006. (math-ph/0602049).
- [49] M. Bauer and D. Bernard, “SLE martingales and the Virasoro algebra,” *Phys. Lett. B*, vol. 557, pp. 309–316, 2003. (hep-th/0301064).
- [50] M. Bauer and D. Bernard, “Conformal transformations and the SLE partition function martingale,” *Annales Henri Poincaré*, vol. 5, pp. 289–326, 2004. (math-ph/0305061).
- [51] M. Bauer and D. Bernard, “CFTs of SLEs: the radial case,” *Phys. Lett. B*, vol. 583, pp. 324–330, 2004. (math-ph/0310032).
- [52] M. Bauer and D. Bernard, “SLE, CFT and zig-zag probabilities,” in *Proceedings of the Conference ‘Conformal Invariance and Random Spatial Processes’, Edinburgh*, 2004. (math-ph/0401019).
- [53] H. Saleur and B. Duplantier, “Exact determination of the percolation hull exponent in two dimensions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, no. 22, pp. 2325–2328, 1987.
- [54] W. Kager, *Conformally Invariant Paths in 2D Statistical Physics*. PhD thesis, University of Amsterdam, 2006.
- [55] I. Rushkin, P. Oikonomou, L. P. Kadanoff, and I. A. Gruzberg, “Stochastic loewner evolution driven by Lévy processes,” *J. Stat. Mech.*, no. P01001, 2006. (cond-mat/0509187).
- [56] D. Bernard, G. Boffeta, A. Celani, and G. Falkovich, “Conformal invariance in two-dimensional turbulence,” *Nature Physics*, vol. 2, pp. 124–128, 2006.
- [57] D. Bernard, G. Boffeta, A. Celani, and G. Falkovich, “Inverse turbulent cascades and conformally invariant curves,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 024501(4), 2007. (nlin.CD/0602017).
- [58] C. Amoruso, A. K. Hartmann, M. B. Hastings, and M. A. Moore, “Conformal invariance and stochastic Loewner evolution processes in two-dimensional Ising spin glasses,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 97, p. 267202(4), 2006. (cond-mat/0601711).

- [59] B. Duplantier, “Conformal fractal geometry and boundary quantum gravity,” in *Proc. Symposia Pure Math.*, vol. 72, pp. 365–482, American Mathematical Society, 2004. (math-ph/0303034).

